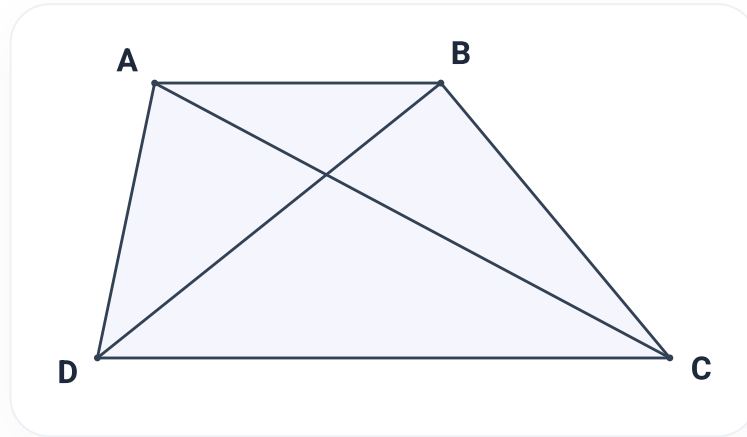


שאלה 1 · שאלות קצרות: יחס שטחים בטרפז, מכפלה טלסקופית באינדוקציה, זהויות $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$ והזזה

ושיקוף של גרף

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

לפניכם טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



נתון: שטח המשולש ADC הוא 24 ושטח המשולש ADB הוא 12.

א(1). חשבו את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז $ABCD$.

א(2). חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.

ב(1). בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

ב(2). חשבו את המכפלה:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

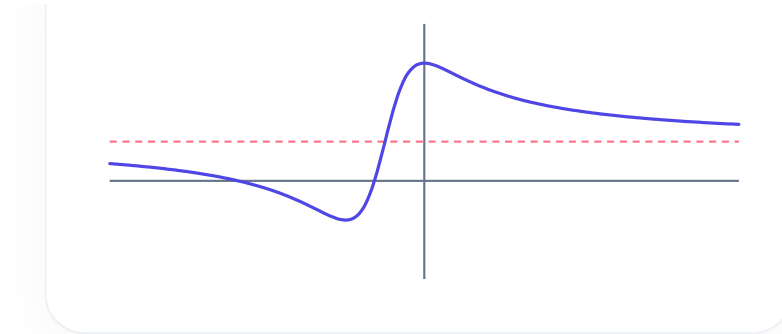
בעבור כל אחת מן הטענות (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם היא נכונה לכל x . נמקו.

ג(1). $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

ג(2). $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

לפניכם הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא: $y = 1$ (ראו סרטוט), ו-2 נקודות קיצון בדיוק: נקודת מקסימום $(0, 3)$ ונקודת מינימום $(-2, -1)$.

— $f(x)$



נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(-x) + 1$. גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .

ד(1). מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמקו.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

שאלה 2 · סדרה חשבונית והסדרה $b_n = S_{n+1} - S_n$: סכום מתחלף של ריבועים ותת-סדרה במקומות האי-

זוגיים

נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ והפרשה d . מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי. מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \dots$. איברי הסדרה B מקיימים: $b_n = S_{n+1} - S_n$ לכל n טבעי.

א(1). האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמקו.

א(2). האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמקו.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-d}$$

נתון:

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$$

$$T_5 = -20$$

ג. חשבו את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם? נמקו.

שאלה 3 · הסתברות: הוצאה עם החזרה רק לחלק מהתוצאות - עץ תלת-שלבי, הסתברות מותנית ו"לפחות

אחת"

בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

א(1). חשבו את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

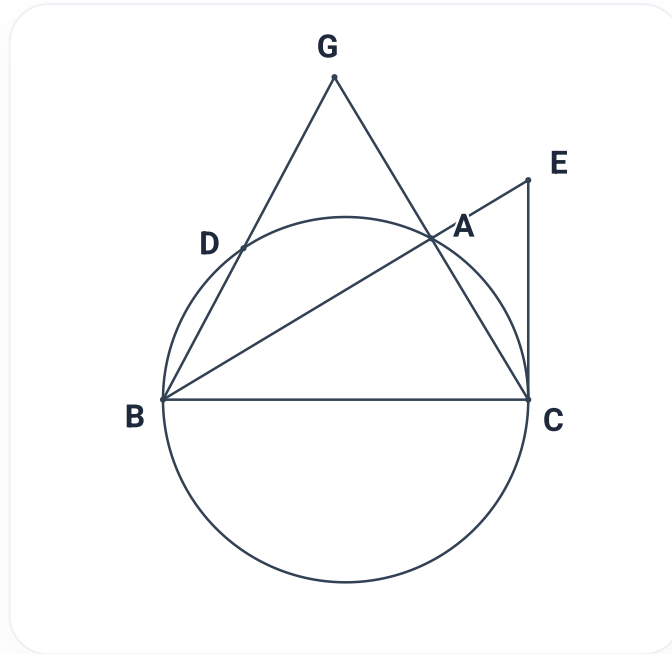
א(2). חשבו את ההסתברות שליאור יאכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה. הביעו בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה. ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה. חשבו את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

שאלה 4 · משולש חסום במעגל שצלעו קוטר: חוצה זווית, דמיון במרובע חסום, יחס שטחים ומשיק

משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראו סרטוט). הצלע BC היא קוטר במעגל. AG הוא המשך הצלע CA . הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D . נתון: $GA = AC$.

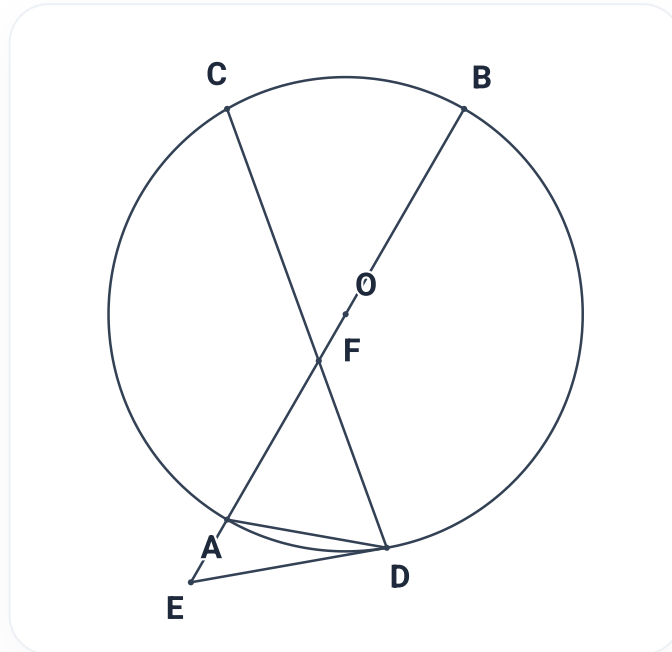


(הסרטוט אינו בקנה מידה.)

- א. הוכיחו כי הישר AB חוצה את $\angle GBC$.
- ב. הוכיחו כי $\Delta GBC \sim \Delta GAD$.
- ג. הביעו באמצעות R את אורך הצלע AC .
- ד. חשבו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC .

שאלה 5 · מעגל, משיק וקוטר: זוויות בפרמטר, שטח במשפט הסינוסים ומשוואה עם $\sin 3\alpha$

AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O . המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F . המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראו סרטוט). נסמן: $\angle ADE = \alpha$.



א. הראו כי: $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$.

נתון כי: $ED = FD$.

ב. הביעו באמצעות α את גודל $\angle CDA$.

ג. הביעו באמצעות α ו- R את שטח המשולש AFD .

ד(1). הביעו באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

ד(2). נתון כי: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$. מצאו את α .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: קיצון, סקיצה, $k \cdot f(x)$ ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

הביעו את תשובותיכם באמצעות m אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

ב. מצאו את הערך של m .

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

ה(1). סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה(2). דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x . נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך). מצאו את הערך של k .

שאלה 7 · פונקציית שורש: חקירת פונקציית הנגזרת, קיצון בקצות התחום ושיפועי משיקים

נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א(3). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א(4). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x . בתשובתכם דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א(5). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

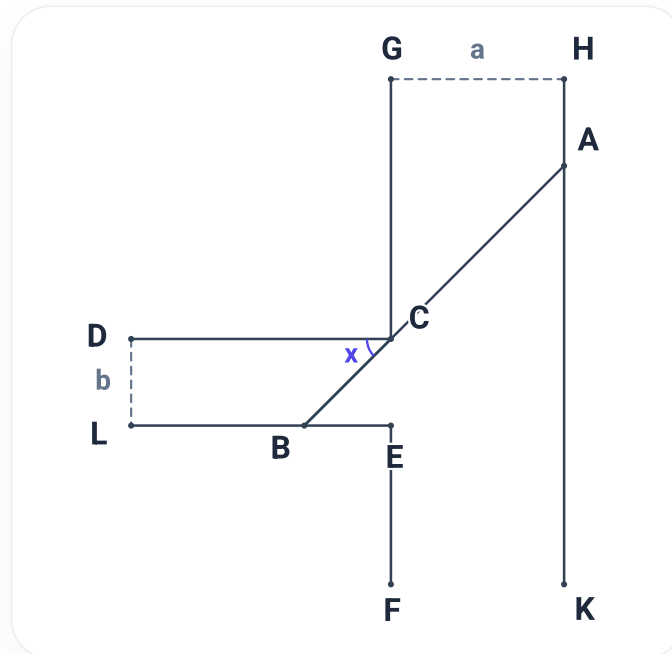
ב(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שיש שמשוואתו $y = 4x + c$ (פרמטר c) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמקו.

שאלה 8 · בעיית קיצון טריגונומטרית: סכר דרך פינה של תעלות

תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b . הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראו סרטוט). מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיוצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית. הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.



א. הביעו באמצעות a , b ו- x את אורך הסכר AB .

נתון כי: $a = 2b$.

ב. מצאו את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצאו את b .

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math