

שאלה 1 · שאלות קצרות: סכום באינדוקציה, משיק ומיתר, אסימפטוטות של פונקציית שורש, פונקציית

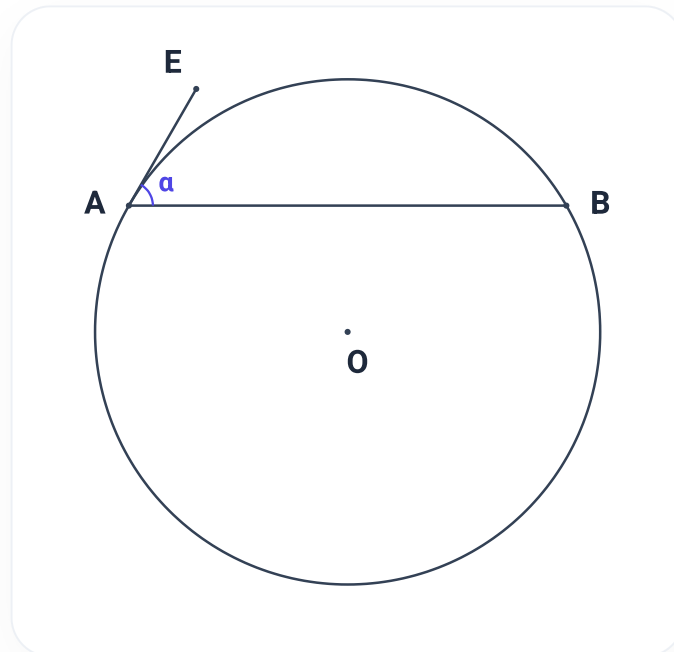
הצטברות של פונקציה אי-זוגית

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים: $1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n-2)(5n-3) = n(5n^2 - 2n - 1)$.
 א(1). חשבו את הערך של הביטוי: $7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 58 \cdot 97$.

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:
 $1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n-2)(5n-3) + (3n+1)(5n+2) = (n+1)(5n^2 + 8n + C)$.
 א(2). מצאו את הערך של C .

הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O . מעבירים משיק למעגל בנקודה A , והוא יוצר זווית של α מעלות עם המיתר AB (ראו סרטוט).



ב(1). הביעו באמצעות α את הזווית AOB .

ב(2). הביעו באמצעות α את היחס בין אורך הקשת הקטנה AB ובין היקף המעגל.

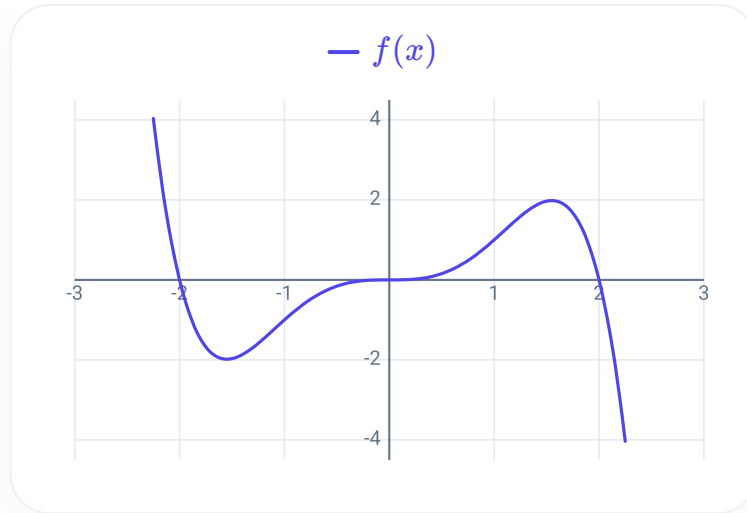
נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ המוגדרת לכל x השונה מ-0.

ג(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתונה הפונקציה: $g(x) = k \cdot f(x+3)$, $k > 0$ הוא פרמטר.

ג(2). מצאו את הערך של k שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $g(x)$ הוא 10. נמקו את תשובתכם.

$f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית המוגדרת לכל x . הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$. נתונה הפונקציה $g(t)$ המוגדרת בתחום: $-2 \leq t \leq 2$ ומקיימת: $g(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$.



ד(1). קבעו באיזה תחום הפונקציה $g(t)$ יורדת.

ד(2). האם קיימים ערכים של t (בתחום: $-2 \leq t \leq 2$) שעבורם הפונקציה $g(t)$ חיובית? נמקו את תשובתכם.

ד(3). האם לפונקציה $g(t)$ יש נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · סדרות הנדסיות אינסופיות: הסדרה $a_n \cdot q^{n-1}$, התכנסות ומונוטוניות, יחס סכומים וסכום חלקי

נתונה סדרה הנדסית אינסופית A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q . בונים סדרה חדשה B , שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

בנוגע לכל אחד מההיגדים (1)-(2) שלהלן, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

ב(1). אם הסדרה A לא מתכנסת - בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

ב(2). אם הסדרה A יורדת - בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{4}{7}$.

ג. מצאו את q .

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{3367}{1024}$.

ד. מצאו את n .

שאלה 3 · שני ארגזים והעברת פרי: הסתברות בפרמטרים, הסתברות מותנית, ברנולי וסידור ההצלחות

בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות. בארגז א' יש a פירות: 6 תפוחים והשאר אגסים. בארגז ב' יש b פירות: 11 תפוחים והשאר אגסים. מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח - מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס - מחזירים אותו לארגז א'. לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו- b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$. ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ו- b .

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

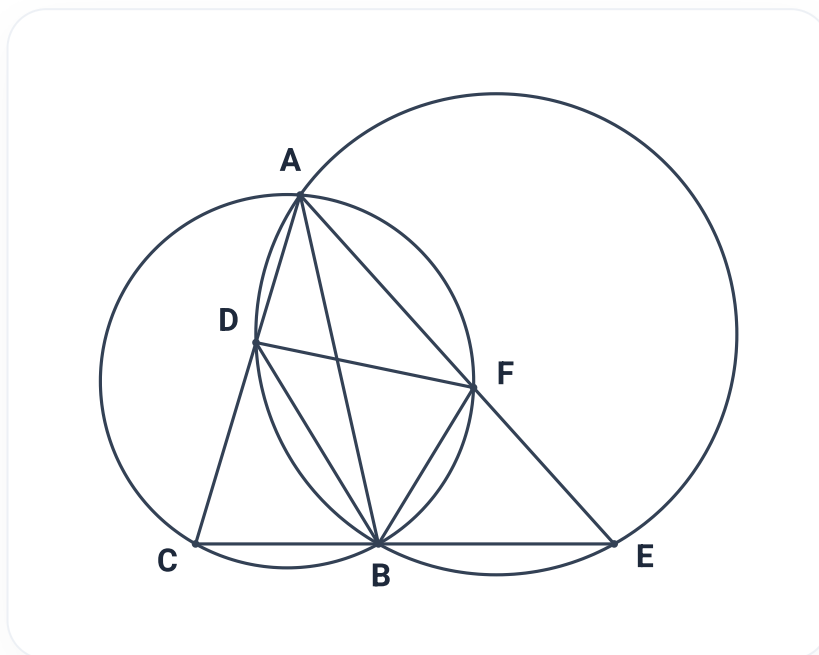
מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר, שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח או שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר בזה.

שאלה 4 · שני מעגלים נחתכים: מרובעים חסומים, דמיון, חפיפה והמשפט ההפוך למשפט חוצה הזווית

שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו- B (ראו סרטוט). המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D . המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F . הקטע CE עובר דרך הנקודה B .



א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.

נתון: $DC = FE$.

ב. הוכיחו כי $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.

ג(1). הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

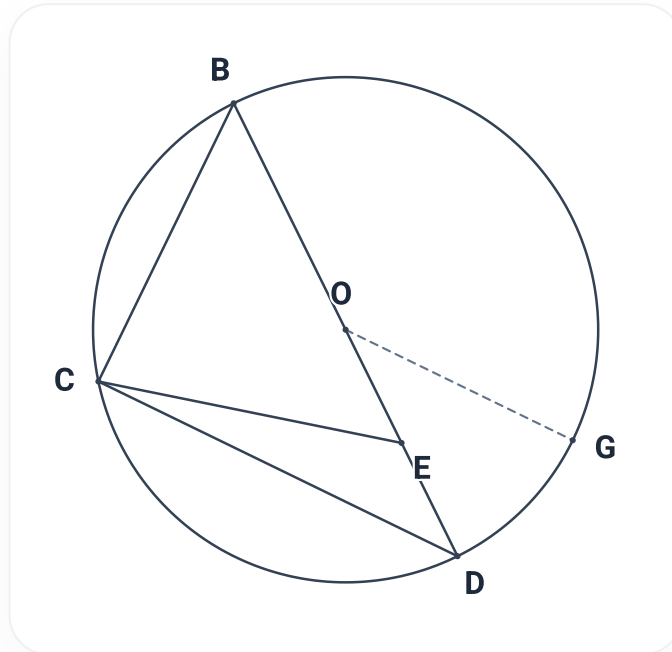
ג(2). הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE .

ד. הוכיחו כי $\angle DEC = \angle FCE$.

שאלה 5 · משולש חסום במעגל שצלעו קוטר: משפט הקוסינוסים עם פרמטרים, שוויון צלעות וזווית קהה

משולש BCD חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R . הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD, כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).

נסמן $CD = k$, $\angle CDB = \alpha$.



א. הביעו את $\cos \alpha$ באמצעות k ו- R .

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 + R^2}$.

נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α .

מעבירים רדיוס OG, המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

שאלה 6 · חקירת $x^n(x+1)^2$: n זוגי מול n אי-זוגי, התאמת גרפים ושטח אחרי הזזה ומתיחה

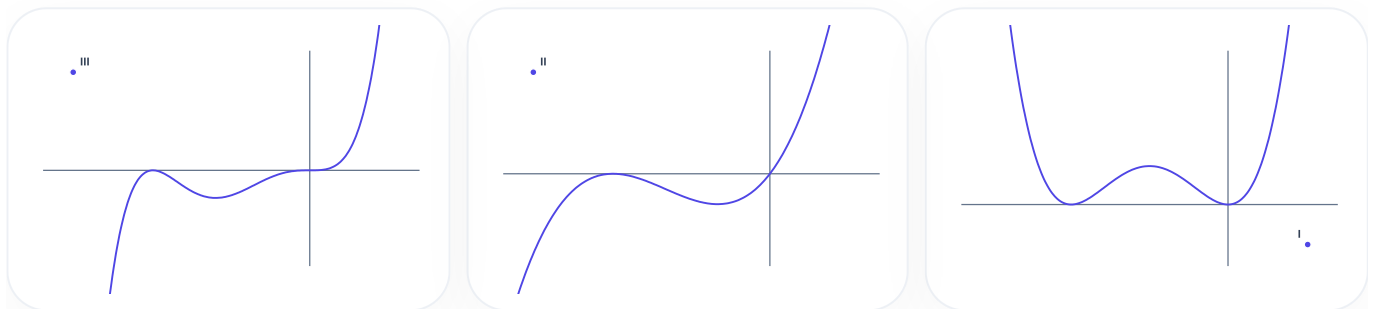
נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$, כאשר $n > 1$ מספר טבעי, והפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובתכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים ו-III. אחד מהגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x-6)$, כאשר k הוא פרמטר חיובי. נסמן ב- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

ה. הביעו באמצעות k ו- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו.

שאלה 7 · חקירת $\frac{4 \sin x}{\cos^2 x - 1}$: אסימפטוטות, אי-זוגיות, היעדר פיתול ושטח מתחת לגרף הנגזרת

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4 \sin(x)}{\cos^2(x)-1}$ בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .

א(3). האם הפונקציה f זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ענו על סעיפים (1)-(2) שלהלן עבור התחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x , בתחום $1.9 \leq x \leq 2.2$.

שאלה 8 · שלוש פונקציות רציונליות: אסימפטוטה מול נקודת אי-רציפות סליקה, סקיצה ומלבן בעל היקף מינימלי

לפניכם שלוש פונקציות, שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות הללו. נמקו.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב(1). מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ושל האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

נסמן נקודה D על גרף הפונקציה, שעבורה $-1 < t < 1$, $x = t$.

מהנקודה D מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה, כך שנוצר מלבן על ידי הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t , שעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math