

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה על מספרים זוגיים, מרובע חסום ודמיון, אסימפטוטות של פונקציית

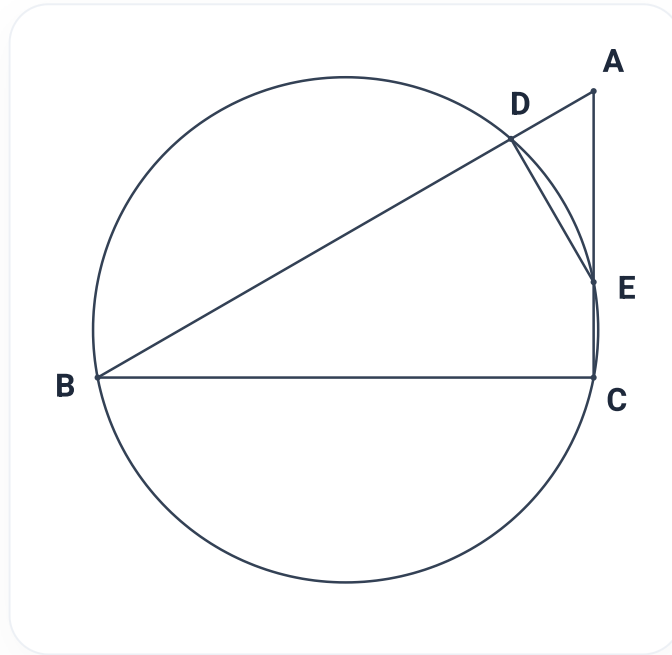
שורש, גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48 + 144 + 288 + \dots + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$

המרובע BCED חסום במעגל. המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט). נתון:
 $AE = 2CE$, $AD = CE$.

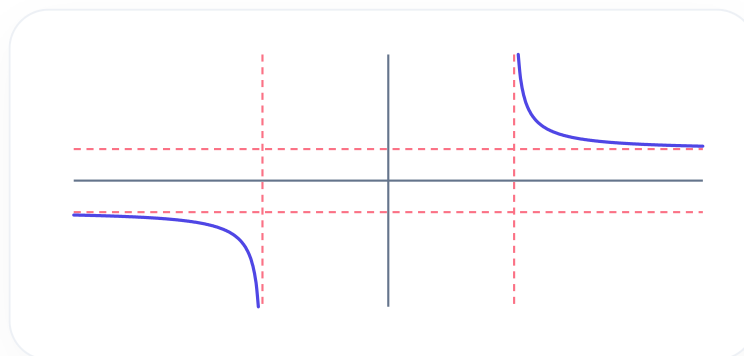


ב(1). הוכיחו: $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

ב(2). מצאו את היחס: $\frac{AB}{AC}$.

ב(3). נתון: $\angle DEC = 150^\circ$. האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.

לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$. לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y . אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.



I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ II. $\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$ III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$ IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

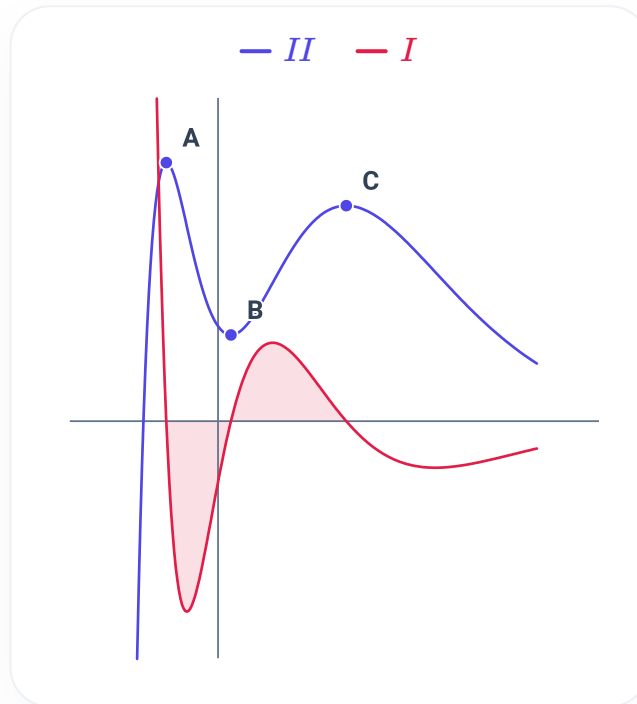
ג(1). קבעו איזה מן הביטויים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$. פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת:

$$g'(x) = f(x) + \frac{5}{3}$$

ג(2). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

הגרפים I-II בסרטוט שלפניכם מתארים את הפונקציה $f(x)$ ואת פונקציית הנגזרת $f'(x)$. כל נקודות הקיצון של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מתוארות בסרטוט.



ד(1). קבעו איזה גרף, I או II, מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

הנקודות A, B ו-C הן נקודות הקיצון של גרף II, כמתואר בסרטוט. נתון: $y_A = 6$, $y_B = 2$. השטח המוגבל על ידי גרף I ועל ידי ציר ה- x (השטח המסומן באיור) שווה ל-7.

ד(3). מצאו את שיעור ה- y של הנקודה C.

שאלה 2 · סדרה חשבונית עם פרמטר: מונוטוניות, סדרה חדשה וסכום מתחלף של ריבועים

בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$. הוא פרמטר.

א(1). מצאו עבור אילו ערכים של k : הסדרה A עולה.

א(2). מצאו עבור אילו ערכים של k : הסדרה A יורדת.

א(3). מצאו עבור אילו ערכים של k : הסדרה A קבועה.

נתון כי: $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד. נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי,

$$b_n = a_n + 24n + 17.$$

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

שאלה 3 · הסתברות מותנית: סקר עם משבצת ריקה בטבלה, "לפחות אחד מכל סוג" וברנולי עם תנאי על

הניסוי האחרון

ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב. בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד. כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת פארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים). כל התושבים המבוגרים שהשתתפו תמכו בהקמת הפארק.

בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.

נסמן ב- p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.

נסמן ב- k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו- k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק. $\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k .

יוסי, כתב חדשות מקומי, ראיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

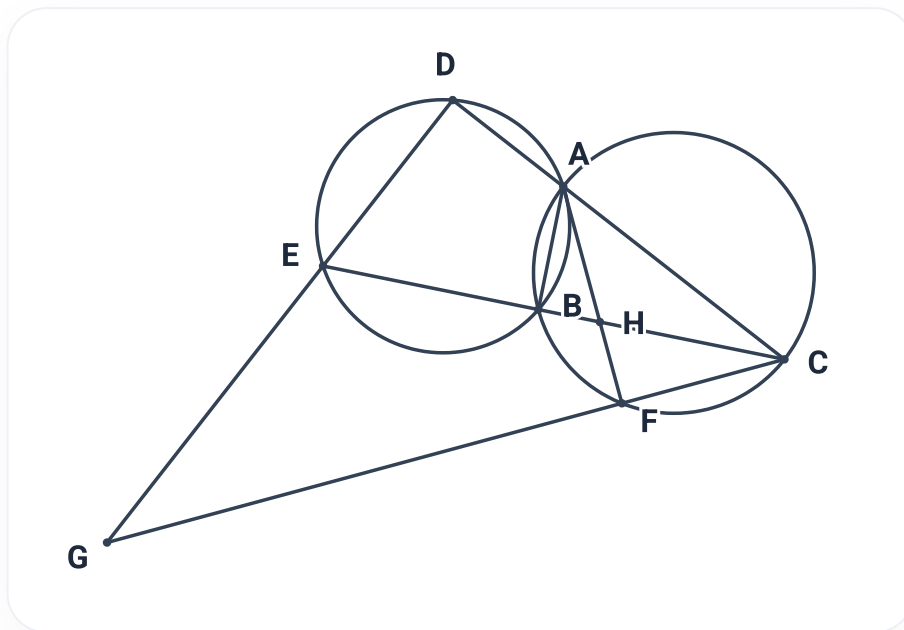
ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ראיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון היה צעיר?

שאלה 4 · שני מעגלים נחתכים: מרובעים חסומים, חוצה זווית ופיתגורס

שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-C. B היא נקודה על המעגל הימני. המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה. הנקודה F נמצאת על הקשת BC, המשכי הקטעים DE ו-CF נפגשים בנקודה G.



א. הוכיחו: $\angle EDA = \angle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H. נתון: $\angle GEC = \angle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

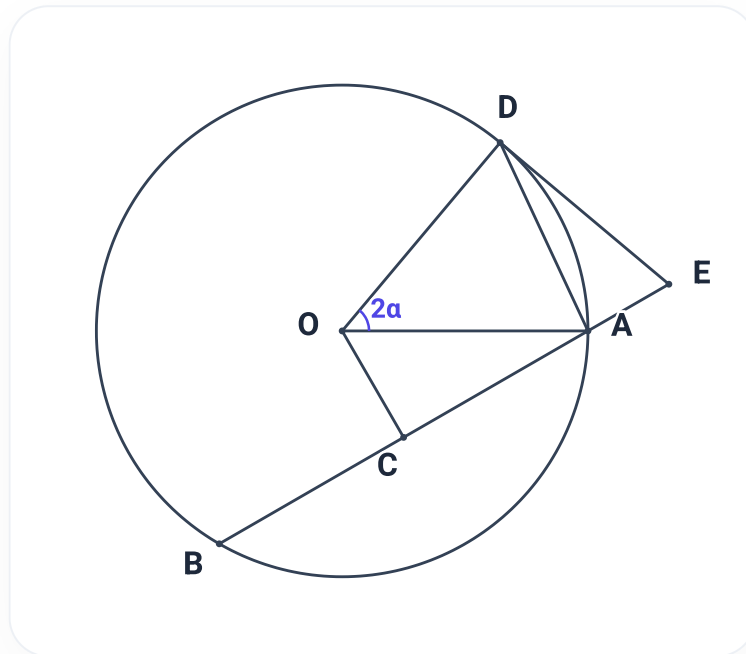
נתון: CE מאונך ל-AB, $DE = 18$, $CD = 36$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.

שאלה 5 · מעגל, משיק וחותר מנקודה חיצונית: זוויות מרובע בר-חסימה, משפט הסינוסים ויחס שטחי

מעגלים

נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R . מנקודה E , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות A ו- B , כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB , כך שהקטע ED משיק למעגל. הנקודה C היא אמצע המיתר AB . נסמן את הזווית בין הרדיוסים OA ו- OD ב- 2α ($\alpha \leq 60^\circ$). נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.



- א. מצאו את זוויות המרובע $DOCE$. הביעו באמצעות α אם יש צורך.
- ב. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE .
- ג. מצאו את α . נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.
- ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע $DOCE$ ובין שטח המעגל הנתון.

שאלה 6 · חקירת $\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$ כנגזרת של $\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$: קיצון בקצה, משיקים, פיתול ואינטגרל של $g \cdot g'$
 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x > 0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים: $f(x) = g'(x)$.

ד. לפניכם טענות I-II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. יש משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.

II. לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. חשבו את ערך הביטוי: $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$.

שאלה 7 · הפונקציה $\frac{\sin x - a}{\sin x + a}$: פרמטר מהשקה לציר x בקיצונים, חקירה בשני מחזורים והערכת אינטגרל

בעזרת קעירות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$, a הוא פרמטר חיובי. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים: $\sin(x) \neq -a$. נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו: $a = 1$, וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב(3). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

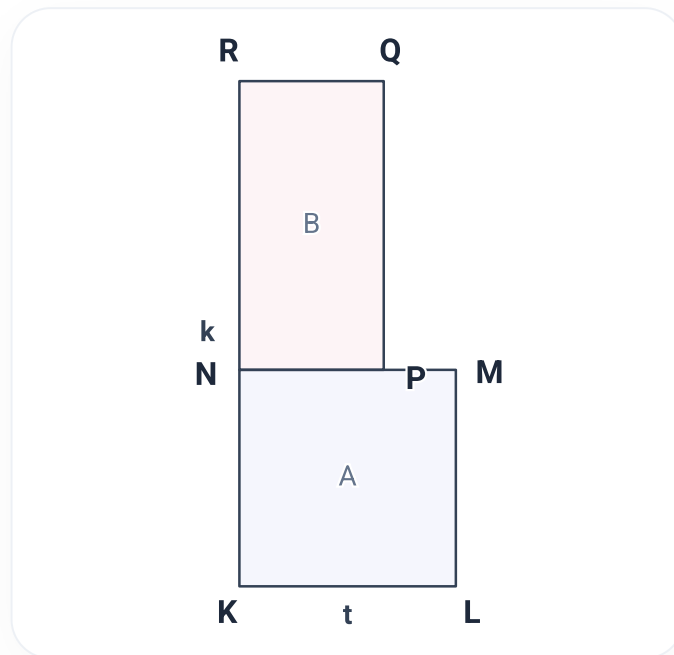
ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x) = -1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם. $\int_0^\pi (f(x) + 1) dx > \frac{\pi}{2}$.

שאלה 8 · בעיית קיצון: יחס שטחים של שתי גינות צמודות עם פרמטר

נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B. הרוחב של גינה A הוא t מטרים. הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא: $2t + 2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם. האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. הוא קבוע.



- א. הביעו באמצעות k ו- t את שטח הגינה A.
- ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.
- ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math