

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה על n זוגי, הסתברות מותנית, תחומי הגדרה של פונקציות שורש, $f^2 f'$ כש- f נתונה בגרף

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון כי השוויון $8 + 24 + 48 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+a)(n+4)}{6}$ מתקיים בעבור $n = 2$. הוא פרמטר. מצאו את הערך של a . **א(1).**

בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי. **א(2).**

כל המועמדים ללימודים באוניברסיטה נבחנים בשני מבחנים. נמצא כי מספר המועמדים שהצליחו רק במבחן הראשון קטן פי 4 ממספר המועמדים שהצליחו בשני המבחנים. $\frac{8}{9}$ מן המועמדים שהצליחו במבחן השני, הצליחו גם במבחן הראשון. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח רק במבחן הראשון.

הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד. **ב(1).**

ידוע שנבחר באקראי מועמד שהצליח לפחות במבחן אחד. מה ההסתברות שהמועמד שנבחר הצליח בשני המבחנים? **ב(2).**

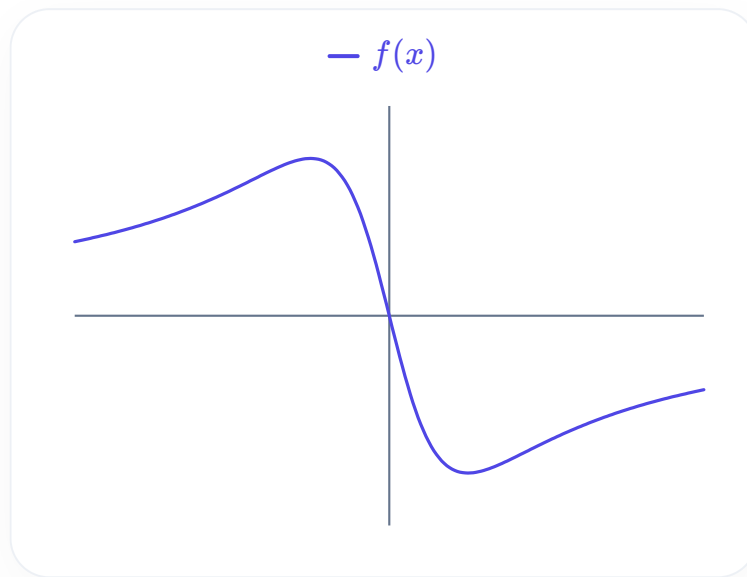
נתונות הפונקציות: $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$, $f(x)$. **ג(1).**

לפניכם הגרפים 1-5.



התאימו לכל אחת מן הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$, $f(x)$ את הגרף המייצג אותה מבין הגרפים 1-5 שלפניכם. **ג(2).** נמקו את קביעותיכם.

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$, מוגדרות לכל x . בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית, ויש לה נקודת מינימום אחת בלבד ששיעוריה הם: $(3, -6)$. לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$.



ד(1). סרטוט סקיצה אפשרית של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד(3). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x . (הדרכה: גזרו את הפונקציה $\frac{f^3(x)}{3}$).

שאלה 2 · סדרה הנדסית שלילית, סדרה $b_n = \frac{k^n}{a_n}$, תנאי התכנסות ומחיקת כל איבר שלישי

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$ ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ-4). נתון: כל איברי הסדרה A הם שליליים.

סכום $m - 4$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 16 מסכום $m - 4$ האיברים הראשונים בסדרה.

א(1). מצאו את מנת הסדרה A.

א(2). האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית. נתונה סדרה אין-סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^n}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ-0.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k .

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{4}$. סכום הסדרה B הוא -3.

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1 .

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי ($b_3, b_6, b_9, \dots$).

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

שאלה 3 · שני כדים: הוצאה עם החזרה או בלי החזרה לפי צבע הכדור הראשון, ניסויים עד לכדור אדום,

והעברת כדורים

בכד א' יש 10 כדורים אדומים ו-15 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים אדומים.

דנה בוחרת באקראי כד ומוציאה ממנו באקראי כדור.

אם הכדור צהוב, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).

אם הכדור הראשון אדום, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם צהובים?

דנה מחזירה לכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את התהליך הזה: היא בוחרת באקראי כד, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לכד. יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור אדום, מחזירה אותו לכד ומפסיקה להוציא כדורים.

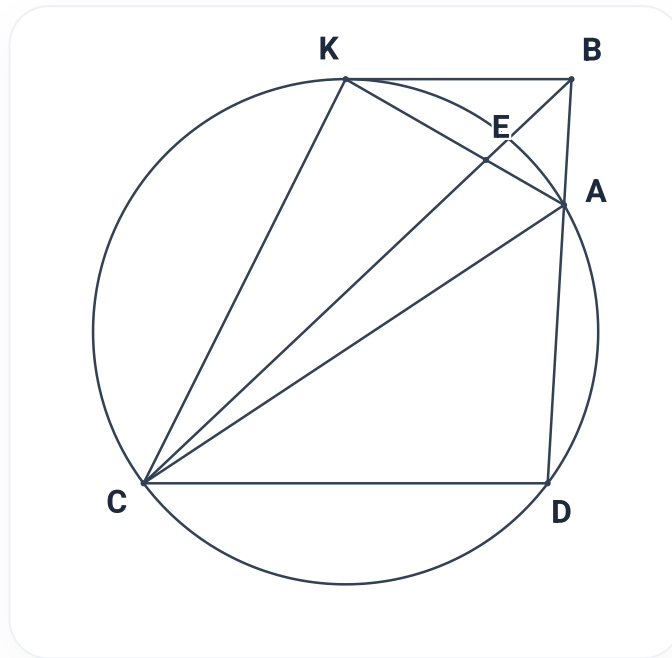
ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 6 פעמים בדיוק.

העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'. לאחר מכן בחרו באקראי כד והוציאו ממנו באקראי כדור אחד. נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה אדום היא $\frac{13}{16}$.

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 14 כדורים? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 · משיק המקביל למיתר: דמיון משולשים, יחס שטחים ויחס קטעים במרובע

במרובע $BKCD$ הצלע KB מקבילה לצלע CD . הצלע CD היא מיתר במעגל והצלע KB משיקה למעגל בנקודה K . הצלע BD חותכת את המעגל בנקודה A . האלכסון BC חותך את המיתר AK בנקודה E (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $\triangle ABK \sim \triangle AKC$.

ב. הוכיחו כי $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.

נתון: $BE = \frac{1}{4}CE$.

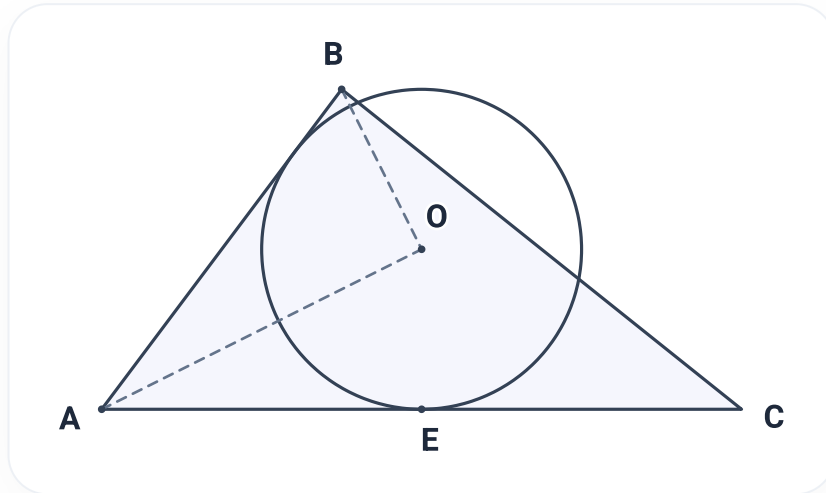
ג. מצאו את היחס $\frac{AK}{AB}$.

נתון: שטח המרובע $ABKC$ הוא 30. נסמן ב- S את שטח המשולש AEB .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KEC .

שאלה 5 · משיקים למעגל מנקודה: הבעת צלע בעזרת $\sin 2\beta$, יחס שטחים ורדיוס המעגל החוסם

נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R . מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל. הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט. נתון: $BO \perp AO$, $AE = CE$. נסמן ב- 2β את הזווית BAC.



א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $2.5R$, והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β .

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 14.

ד. מצאו את הערך של R .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית מתוך נגזרתה: אינטגרל, אסימפטוטה, נקודת אי-רציפות סליקה והתאמת גרפים

נתון כי $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-a^2)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום. בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

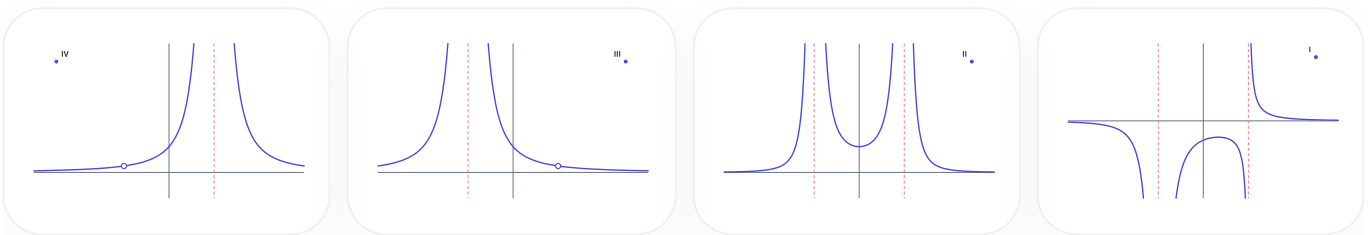
א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

ג. מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

נתונות הפונקציה $g(x) = \frac{x-a}{(x^2-a^2)^2}$ והפונקציה $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^2-a^2)^2}$. הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.



ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV. נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לפונקציה $h(x-9)$ יש אסימפטוטה שמשוואתה $x = 0.8a$.

ה. מצאו את הערך של a .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם $\frac{4}{\cos^2 x}$: זוגיות, משיק אופקי, שלושה מינימומים ומפגש של g עם $\frac{1}{g}$

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos x + \frac{4}{(\cos x)^2} + a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר $y = 4$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$ וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציה $g(x) = f(x) - k$ והפונקציה $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. k הוא פרמטר, $k \neq 4$, $k \neq 6$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ וגרף הפונקציה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

שאלה 8 · פונקציית שורש $x\sqrt{8-x}$: תחום, סימן, סקיצה ומלבן בעל היקף מקסימלי

נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{8-x}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת ואין לה נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x)$. הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה- x . מן הנקודה A העבירו שני אנכים: אנך אחד לציר ה- x החותך אותו בנקודה B, ואנך נוסף לישר $x = 8$ החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math