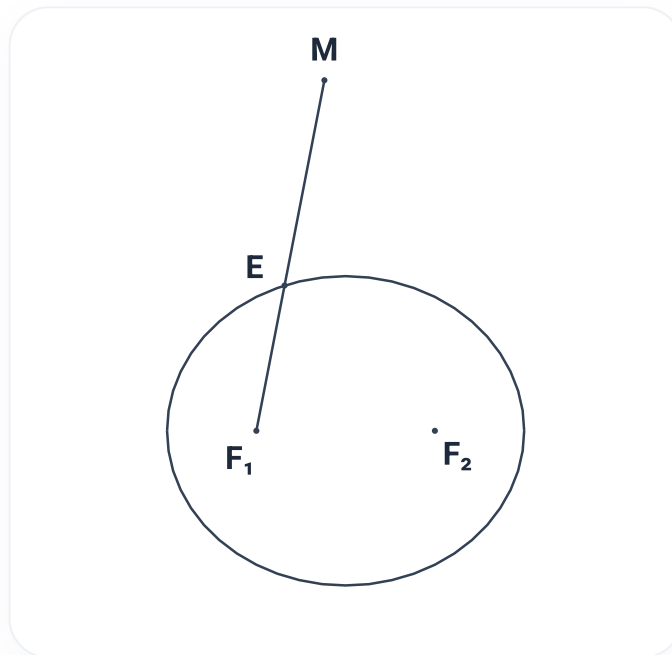


שאלה 1 · אליפסה ומשולש שווה-צלעות: מקום גאומטרי של מעגל ומתיחה לאליפסה

נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b הוא פרמטר חיובי. ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x . נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 (מעל ציר ה- x) ו- D_2 , את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2 . נתון כי המשולש $F_1D_1F_2$ הוא משולש שווה-צלעות.



א(1). מצאו את הערך של b .

א(2). חשבו את שטח המרובע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 12$ וענו על סעיפים ב-ד. נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה. מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב-2 יחידות, ומתקבל מעגל אחר. מכפילים ב- $\frac{3}{4}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר, ומתקבל עקום חדש.

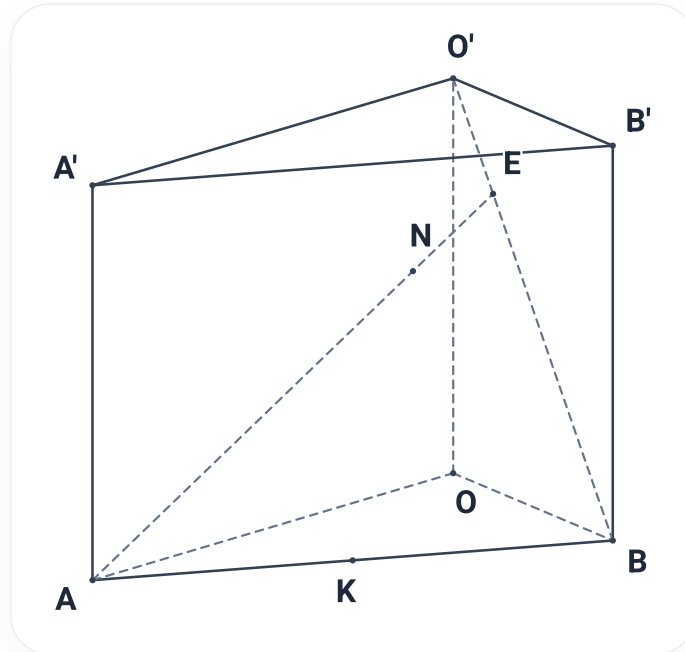
ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששני מוקדיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש עם ציר ה- y , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · וקטורים במנסרה משולשת: יחס 5:2, מישור ונפח

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$ שבסיסה AOB הוא משולש ישר-זווית ($\angle AOB = 90^\circ$). הנקודה K היא אמצע המקצוע AB . הנקודה E נמצאת על הקטע $O'B$ כך ש- $O'E = \frac{1}{4} \cdot O'B$. הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AE}$. נסמן: $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OO'} = \underline{w}$.



א(1). הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את $O'N$.

א(2). הוכיחו כי הנקודות O' , N , K נמצאות על ישר אחד, ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $O(0,0,0)$, $A(8,0,0)$, $E(0,1.5,6)$. הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד O' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות N ו- B .

ג. מצאו את משוואת המישור $A'KB'$.

ד(1). מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

ד(2). מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$.

שאלה 3 · מספר מרוכב והופכי שלו, מצולע משוכלל בן 12 צלעות

נתון המספר המרוכב $w = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $r > 0$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

א. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$. הנקודה O היא ראשית הצירים. נתון כי שטח המשולש AOB הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$ והזווית AOB היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של θ .

נתונות שתי משוואות: I. $z^6 = w^6$. II. $z^6 = (w \cdot \bar{w})^3$. z הוא מספר מרוכב. נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה I וכל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה II.

ג(1). מצאו כמה קודקודים יש למצולע.

ג(2). האם כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים? נמקו את תשובתכם.

נתון כי שטח המצולע הוא 75.

ד. מצאו את הערך של r .

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר, הפונקציה $\frac{1}{f} + \frac{1}{2}$ ומקסימום של אינטגרל

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + m}{6}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את m .

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 6$.

ה. מצאו את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · פונקציה מעריכית עם פרמטר: קיצון, השקה לציר ה- x , גרף של $\ln f$ וחסם לאינטגרל

נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^{-x} - 12 \cdot 2^{-x} + m$, m הוא פרמטר.

בתת-סעיפים (1)-(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות m , אם יש צורך.

א.(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א.(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

א.(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .

ג.(1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג.(2) היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\ln(f(x))$.

ד. הסבירו מדוע: $\int_0^1 [\ln(f(x)) - \ln(5)] dx < \ln\left(\frac{16}{5}\right)$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math