

שאלה 1 · שני מעגלים משיקים ביחס 1:3: משיקים משותפים

נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ. מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא:
 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, a הוא פרמטר חיובי. מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא:
 $(x - 10)^2 + y^2 = R^2$. אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 8, והיחס בין אורכי הרדיוסים של
 המעגלים הוא: $1 : 3 : R$, $r < R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M .

נתון כי: $a < 10$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

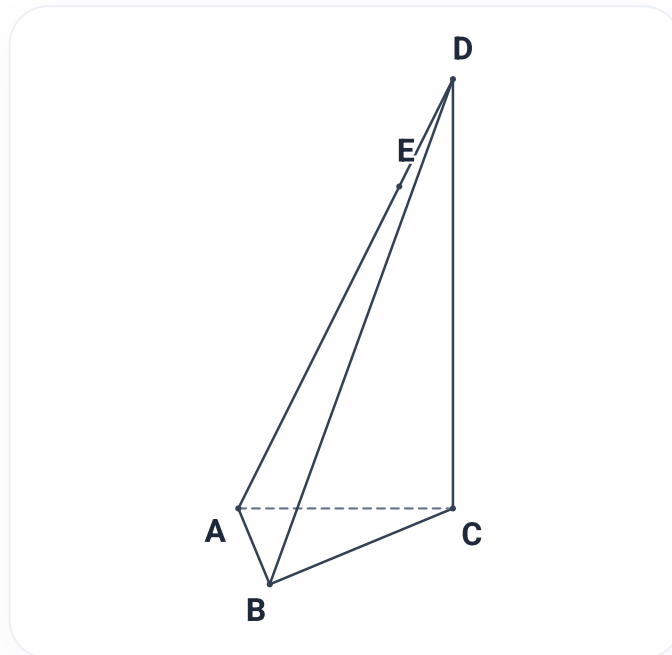
ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים. מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ. משוואות המעגלים הן: $(x - k)^2 + y^2 = R^2$; $(x - t)^2 + y^2 = r^2$, t ו- k הם פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו- R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k . אם לא – נמקו.

שאלה 2 · פירמידה: וקטור מקביל למישור, שיעורים, נפח וישרים מצטלבים

בפירמידה $ABCD$, המקצוע DC מאונך למישור ABC . הנקודה E נמצאת על המקצוע AD כך ש-
 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{DF} = k \cdot \overrightarrow{DB} + k \cdot \overrightarrow{DC}$, הוא פרמטר. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$,
 $\overrightarrow{CD} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.



א. הביעו באמצעות: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את $\overrightarrow{EF}$.

נתון: $\overrightarrow{EF}$ מקביל למישור ABC .

ב. מצאו את הערך של k .

נתון: $A(0,0,0)$, $C(0,n,0)$, $B(p,3,0)$, ו- p הם פרמטרים חיוביים. $\overrightarrow{BD} = (-6,3,12)$,
 $\underline{u} \cdot \underline{v} = 18$.

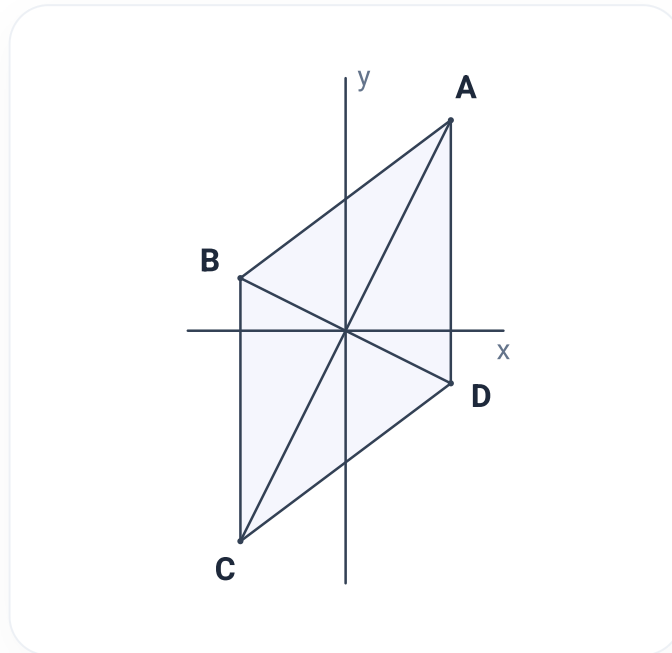
ג. מצאו את שיעורי הנקודות B , C ו- D .

ד. מצאו את נפח הפירמידה $ABCD$.

ה. מהו המצב ההדדי בין הישר EF לבין הישר AB ? נמקו את קביעתכם.

שאלה 3 · מעוין במישור גאוס, מספרים הופכיים ושורשי משוואה

במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס. אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים. המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A. נתון: $AC = 2BD$.



א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים B, C ו-D.

נסמן: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

ב(1). כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $(\frac{1}{z}, \dots)$ למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

ב(2). ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע. מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^3 = 4\bar{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ-0. מצאו את סכום 4 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת-סעיף ב(2).

ד. מצאו את הערך של r .

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר: זיהוי גרפים, נקודה חסרה והשוואת אינטגרלים

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{e^x + a}$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

בסוף השאלה מופיעים ארבעה גרפים I-IV:



ענו על התת סעיפים (1)-(3) בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = 2$ ואיזה מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = -2$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a = -2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ה. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)-3}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2} g(x) dx < \int_2^4 g(x) dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · פונקציה אי-זוגית לפי תכונות, $\ln f(x)$, וקדומה זוגית של $-\frac{6x}{4+x^2}$

נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מקסימום יחידה ששיעוריה הם: $(-2, a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

ב(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ב(3). מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = -\frac{6x}{4+x^2}$. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג(1). מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ג(2). האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-4}^t g(x) dx$, $t > -4$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-4}^4 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-4}^t g(x) dx$? נמקו.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math