

שאלה 1 · אליפסה, מעגל במוקד, משיק וריבוע - יחס 4:1

נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{9k^2} = 1$. k הוא פרמטר חיובי. הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה. נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y . הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב(1). מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF .

ב(2). הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D .

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D .

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 12. אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג. הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .

שאלה 2 · שני מישורים עם פרמטר: ישר חיתוך מקביל, זווית ושטח משולש

נתונים שני מישורים, π_1 ו- π_2 : $\pi_1: (k-2)x + y + (k-3)z + 3 = 0$, $\pi_2: (k+1)x + y + z - 9 = 0$.
הוא פרמטר. k

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, ℓ_1 , מקביל לישר $\ell_2: \underline{x} = (2, 0, 5) + m(-1, k, k)$.

ב(1). מצאו את הערך של k .

ב(2). מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 .

ב(3). מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור $[yz]$. הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה-y עם המישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה.

ג(1). מצאו את שיעורי הנקודות A, P ו-B.

ג(2). מצאו את שטח המשולש APB.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: שורש ריבועי, מקומות גאומטריים מעגליים ושורשים מסדר שלישי

נתונה המשוואה: $(z-i)^2 - 3 - 4i = 0$, z הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את המשוואה.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב- a_1 וב- a_2 כך ש- $a_1 < a_2$.

נתונים שני מקומות גאומטריים:

$$I. |z - ia_1| = 2$$

$$II. |z - ia_2| = 2$$

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

הישר $y = -x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים שסרטטתם בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי שני המספרים המרוכבים w_1 ו- w_2 .

ג. פתרו את המשוואה: $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

שאלה 4 · חקירת פונקציה מעריכית ושטח עם פרמטר

נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - \frac{4}{1-e^x}$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -4x + 4 \ln(e^x - 1)$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). הראו כי $g'(x) = f(x) - e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר $x = \ln(b)$.
 $b > 3$ הוא פרמטר. הביעו את תשובתכם באמצעות b .

נתון כי השטח שמצאתם בסעיף ד שווה ל- $b - 3 + 4 \ln(1.4)$.

ה. מצאו את הערך של b .

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית רציונלית: חקירה, זיהוי גרף בלי צירים ומלבן

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln(x)}{(\ln(x))^2 - 1}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

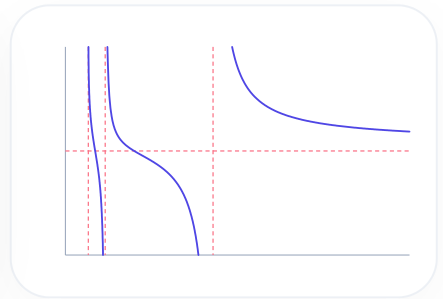
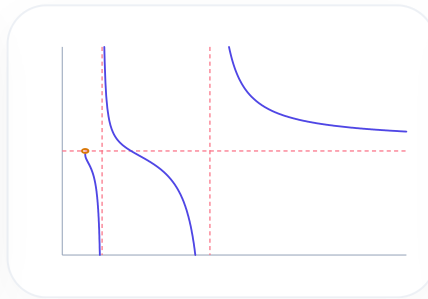
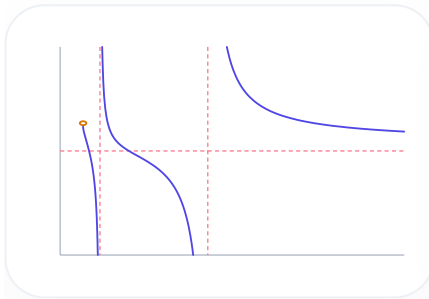
א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניכם שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבעו איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתיקו אותו, והוסיפו בו את מערכת הצירים. פרטו את שיקוליכם.

גרף ג

גרף ב

גרף א



ג(1). האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 0$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד? נמקו את תשובתכם.

נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $h(x) = (\ln(x))^2 + 2$.

נסמן מלבן $ABCD$. הנקודות A ו- B הן שתי הנקודות על החלק החיובי של ציר ה- x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת ואין לה בהן אסימפטוטה אנכית (A משמאל ל- B).

הנקודות C ו- D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן $ABCD$? נמקו את תשובתכם.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math