

שאלה 1 · מעגל של זווית ישרה, פרבולה שמוקדה במרכזו ומשיקים מקבילים

נתונות הנקודות $A(-8a, 0)$ ו- $B(17a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי. הנקודה P מקיימת $\angle APB = 90^\circ$.

א. הראו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על מעגל, ומצאו את משוואתו. הביעו את תשובתכם באמצעות a .

נתון כי השטח הגדול ביותר של המשולש APB הוא 625.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 2$ וענו על הסעיפים ג-ד. אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית. הפרבולה והמעגל שמצאתם נחתכים ברביע הראשון בנקודה C .

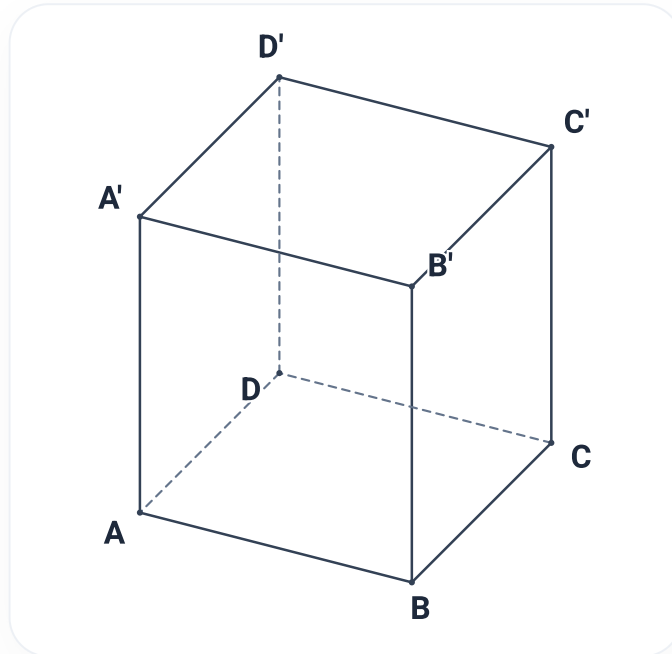
ג. מצאו את שיעורי הנקודה C .

הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C . מעבירים משיק למעגל שמצאתם. נתון כי משיק זה מקביל לישר ℓ .

ד. מצאו את המרחק בין הישר ℓ לבין המשיק למעגל (מצאו את שתי האפשרויות).

שאלה 2 · מנסרה ישרה שבסיסה מעוין: וקטור מאונך למישור, גובה, נפח ושיעורי נקודה

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $ABCD A' B' C' D'$, שבסיסה הוא מעוין $ABCD$.
נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש: $D'F = tD'A + \frac{1}{3}D'C$, t הוא פרמטר.
נתון: DF מאונך למישור ACD' , $\angle ADC = 60^\circ$, $|\overrightarrow{DC}| = 6$.
נסמן: $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$.



א. הביעו את $\overrightarrow{DF}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- t .

ב. מצאו את t .

ג. חשבו את נפח המנסרה.

נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x , הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z , $C = (3, \sqrt{27}, 0)$.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה F .

שאלה 3 · שורשים מסדר 6 והזזה ממשית: מעגל, משושה ודלתון

נתונה משוואה I: $w^6 = 64$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $(z - 1)^6 = 64$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב(1). היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

ב(2). הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתן.

ב(3). הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג(1). מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

שאלה 4 · חקירת מנה מעריכית עם פרמטר: טענה על אינטגרל

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + 3x}{e^x - x} + b$, המוגדרת לכל x . b הוא פרמטר.

ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 2$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

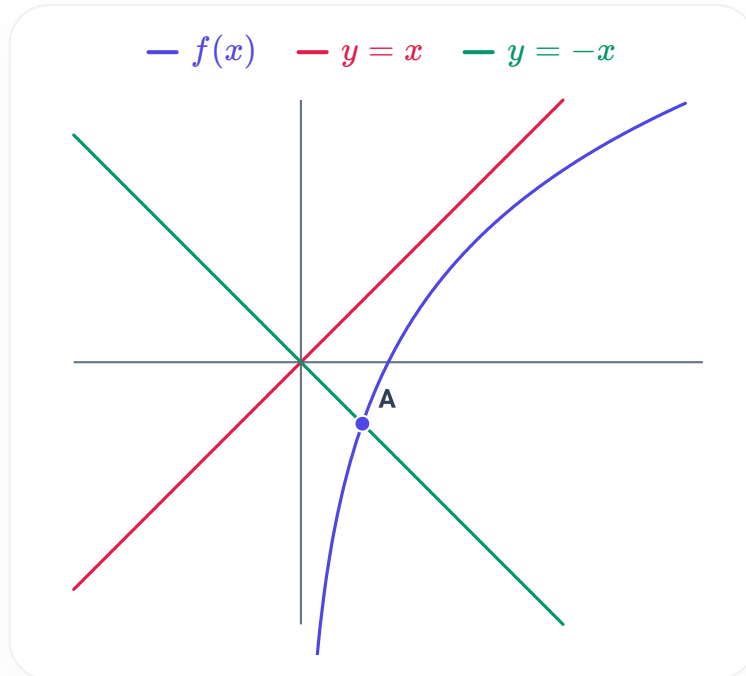
ד(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפיניכם טענה: $\int_0^1 (f(x) - 2) dx < \frac{2}{e-1}$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית: נקודת חיתוך מסרטוט, חקירה וגרף של $e^{g(x)}$

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = 2\ln(x)$ המוגדרת בתחום: $x > 0$, ומתוארים הישרים: $y = x$ ו- $y = -x$. הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם אחד מן הישרים. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- a . היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א-ה שלפניכם. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{2\ln(x)-x}{2\ln(x)+x}$.



- א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
- א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).
- א(3). מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$.
- ב. הסבירו מדוע מתקיים: $0 < a < 1$.
- ג(1). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.
- ג(2). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x) = e^{g(x)}$.

כל הברריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math