

שאלה 1 · פרבולה ואליפסה עם מוקד משותף: מעגל דרך ארבע נקודות חיתוך

הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. t הוא פרמטר חיובי.

אורך הציר המשני של האליפסה הוא $2t$.

בסעיפים שלפניכם הביעו את תשובותיכם באמצעות t , אם יש צורך.

א. מצאו את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו- B . הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A ו- B .

ישר המאונך לציר ה- x עובר בנקודה $(2t, 0)$ וחותך את הפרבולה בשתי נקודות, C ו- D .

הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D .

ג. מצאו את שיעורי הנקודות C ו- D .

ד(1). הסבירו מדוע ארבע הנקודות A , B , C ו- D נמצאות על מעגל אחד.

ד(2). מצאו את שיעורי מרכז המעגל הזה.

שאלה 2 · ישר ומישור עם פרמטר: ניצבות, נקודת חיתוך ומישור יחיד

נתונים הישר ℓ והמישור π . ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא:

$$\underline{x} = (4, -6, 5) + t \cdot (m - 2, 4 - m, -2)$$

$$3x + my + (m + 5)z - 15 = 0 \quad m \text{ הוא פרמטר.}$$

א. הראו כי לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .

נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותך אותו בנקודה A .

ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

ד. לפניכם טענה: קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר ℓ ועובר דרך הנקודה $(10, -14, 6)$. קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית: שורשים שלישיים ושטח דלתון

נתונים שלושה מספרים מרוכבים: $z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ))$, $w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}$, $r > 0$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 1.

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r .

נתונה המשוואה $z^3 = 4 \cdot (z_1 \cdot w)^2$. z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים. כל אחת מן הנקודות B ו-C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות שמצאתם בסעיף ג. הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע הרביעי. המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + i \cdot y$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה K. b הוא מספר ממשי חיובי. נתון כי שטח המרובע CKBO הוא $3\sqrt{3}$.

ד. מצאו את הערך של b .

שאלה 4 · פונקציה לוגריתמית עם פרמטר: חקירה, הפונקציה ההופכית $\frac{1}{f}$ ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax}{(\ln(x)-a)^2}$, $a > 0$, הוא פרמטר.

בסעיפים א-ב, הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

א(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ב(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה- x העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x = e^{a+3}$ ועל ידי ציר ה- x , הוא $\frac{19}{3}$.

ג. מצאו את a .

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית אי-זוגית וההופכית לה: מינימום שנוגע ב- $y=-1$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{2} (\ln(x^2) - 2)$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

א(3). הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב(2). האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

ב(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.

ג(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג(4). בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.

ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math