

שאלה 1 · מקום גאומטרי של אמצע היתר: פרבולה אנכית, משיק ומעגל

במשולש ישר זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם: $(0, a)$, a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- y של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה- y . הנקודה M היא אמצע הצלע BC .

א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M .

ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א. סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.

באחת מן הנקודות M , שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC .

נתון גם כי: $AM = 13$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר: $y = -4$.

ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .

דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו- AC .

ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.

שאלה 2 · שני מישורים בזווית 45° : אנך, ישר חיתוך ושטח משולש

נתונים שני מישורים: $\pi_1: x - 1 = 0$, $\pi_2: ax + 3y + 4z - 20 = 0$, a הוא פרמטר שונה מ-0. הזווית בין המישורים היא 45° .

א. מצאו את הערכים האפשריים בעבור הפרמטר a .

הנקודה $A(5, 3, 9)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים. מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.

האנך חותך את המישור האחר בנקודה B .

ב. מצאו את אורך הקטע AB .

ℓ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .

ג. מצאו את ההצגה הפרמטרית של ℓ .

מן הנקודה B העבירו אנך לישר ℓ . האנך חותך את הישר ℓ בנקודה C .

ד. מצאו את שטח המשולש ABC .

שאלה 3 · מספר מרוכב ברביע הרביעי: ארגומנט מהמנה בצמוד, מודול, דה-מואבר ודלתון במישור גאוס

המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע הרביעי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α .

נתון: $|3iz| - \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| + \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 5$.

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^6}{64}$ (z הוא המספר שמצאתם). הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$. קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

ד(1). מהו הערך של k ?

ד(2). חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר: אסימפטוטות, סקיצה ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{7}{e^x - 7} + a$. a הוא פרמטר.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a .

הציבו $a = 2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. הראו כי $f(x) = \frac{2e^{2x} - 8e^x}{e^{2x} - 8e^x + 7}$.

ה(1). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ה(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 2$.

שאלה 5 · חקירת מנה לוגריתמית והפונקציה ההופכית - אסימפטוטה ב- e^{-2}

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{2 + \ln(x)}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{2}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.

ה(1). קבעו איזה מן הביטויים I-II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם. I. $k + \ln 4$ II. $k + 2 \ln(k)$

ה(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^4$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math