

שאלה 1 · פרבולה וישר $y = 2x$: מעגל שמרכזו במוקד ומקום גאומטרי

נתון הישר $y = 2x$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. p הוא פרמטר חיובי. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.

א. הביעו באמצעות p את שיעורי הנקודה A.

נסמן ב- ℓ את המשיק לפרבולה בנקודה A. הנקודה F היא מוקד הפרבולה. מעגל I שמרכזו בנקודה F משיק לישר ℓ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות p את משוואת מעגל I.

ג. הראו כי הנקודה B נמצאת על ציר ה- y .

נתון: $AB = 3\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבפנים למעגל I ואורך הרדיוס שלהם הוא $3\sqrt{2} - 2$.

שאלה 2 · פירמידה שמקצועותיה מאונכים ושונים באורכם: עקב הגובה, נקודה לפי נפח, ישר ומישור

נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC. נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$. נתון: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. הנקודה H מקיימת: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 2|\underline{w}|$. מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $s = t$ ו- $k = 4t$.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB. הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, על התיכון CD, כך ש- $CM : MD = 1 : 2$.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{6}\underline{v} + \frac{2}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, את הווקטור $\vec{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC גדול פי 3 מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה- x , הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה- y , והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה- z . נתון: $|\underline{w}| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא 18. חשבו את a .

שאלה 3 · מספרים צמודים, חזקות בדה-מואבר ומעגל במישור גאוס

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = (a^2 - 2a + 1)\sqrt{3} + (a^2 - 3)i$$

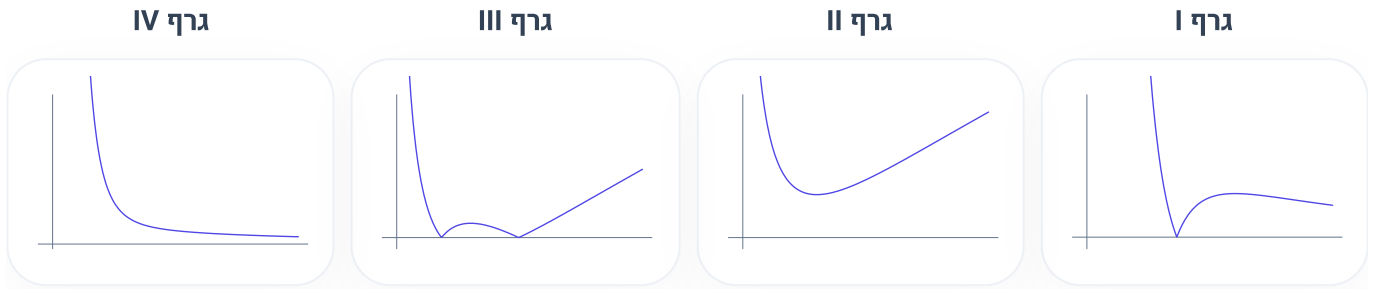
$$z_2 = (3a - 5)\sqrt{3} + (1 - a)i$$

 a הוא פרמטר ממשי.**א.** מצאו את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ג.נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{2}\right)^{6n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{2}\right)^{6n+3}$. n הוא מספר טבעי.הוכיחו כי לכל n טבעי:**ב(1).** המספר w_1 הוא מספר ממשי.**ב(2).** המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.**ג.** נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמקו.**שאלה 4 · פונקציה ונגזרתה: $f = g'$, חקירה, שטח ואינטגרל**נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{x^2+2x-7}{e^x}$. המוגדרות לכל x . a הוא פרמטר.**א.** מצאו את הערך של a שבעבורו: $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.**ב(1).** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.**ב(2).** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.**ב(3).** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.**ג.** סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$.**ד.** חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .**ה.** חשבו את הערך של הביטוי: $\int_3^4 \left(\frac{e^{2x}}{(x^2+2x-7)^2} \right) \cdot \left(\frac{x^2-9}{e^x} \right) dx$.

שאלה 5 · חקירת פונקציה לוגריתמית עם פרמטר וזיהוי גרף של ערך מוחלט

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a - \ln(x)}{x}$, המוגדרת בתחום $x > 0$, a הוא פרמטר.

בסוף השאלה מופיעים ארבעה גרפים I-IV:



(הגרפים I-IV הם סקיצות איכותיות, ואינם בקנה מידה.)

בתת סעיפים (1)-(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x}$, המוגדרת בתחום $x \neq 0$. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$ נחתכים בנקודה שבה $x = e$.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם וענו על סעיפים ד-ה. נתונה הפונקציה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$. גרף הפונקציה $h(x)$ עובר בנקודה $(e^2, -2)$. נגזרת הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h'(x) = f(x) - g(x)$.

ד. מצאו את $h(x)$.

ה. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-IV מייצג את הפונקציה $|h(x)|$. נמקו את תשובתכם.

כל הברריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math