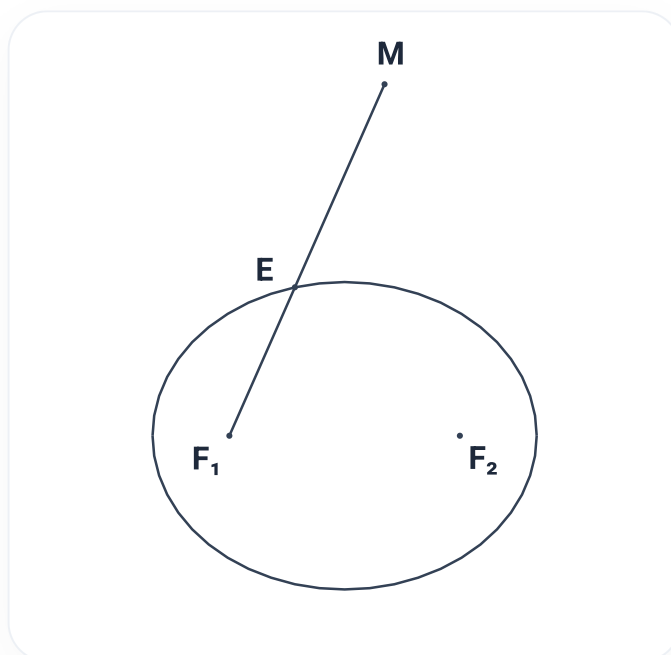


שאלה 1 · אליפסה: מקום גאומטרי של מעגל, כיווץ לאליפסה ומשולש מקסימלי

נתונה האליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. נסמן את המוקד השמאלי שלה ב- F_1 ואת המוקד הימני ב- F_2 . נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה. מחברים את F_1 עם E וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.



א. מצאו את שיעורי המוקדים F_1 ו- F_2 .

ב(1). הראו כי לכל מיקום של הנקודה E על האליפסה מתקיים $F_1M = 10$.

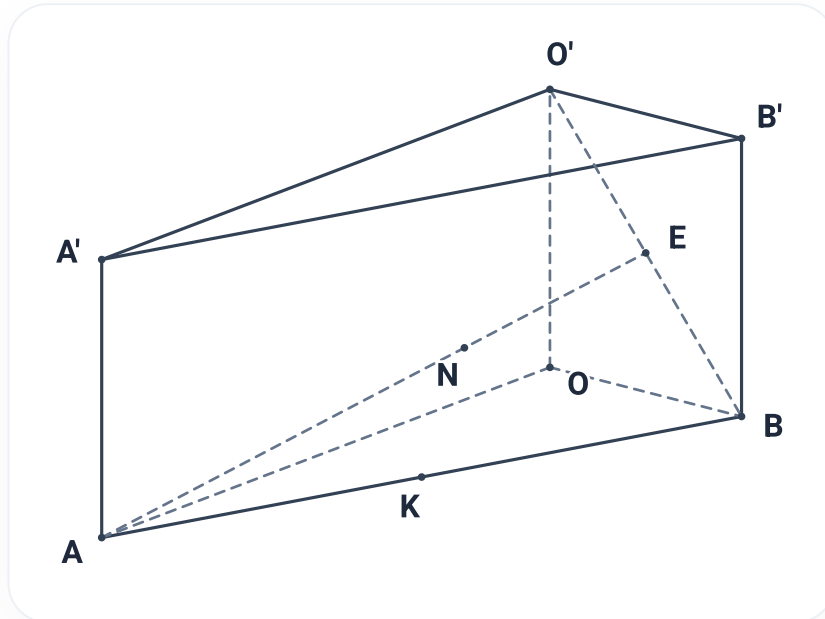
ב(2). היעזרו בסעיף ב(1), הסבירו מדוע כל הנקודות M נמצאות על מעגל, ורשמו את משוואתו.

ג. מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב(2) ימינה ב-3 יחידות. אחר כך מכפילים ב- $\frac{4}{5}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל שהתקבל. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

ד. נתון משולש ששנייה מקודקדיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש עם ציר ה- x , והקודקוד השלישי נמצא על העקום החדש. היעזרו בכך שהבסיס של המשולש קבוע, ומצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש.

שאלה 2 · וקטורים במנסרה משולשת: מהבעת וקטורים לנפח

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$ שבסיסה AOB הוא משולש ישר-זווית ($\angle AOB = 90^\circ$). הנקודה K היא אמצע המקצוע AB . הנקודה E היא אמצע הקטע $O'B$. הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AE}$. נסמן: $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OO'} = \underline{w}$.



א(1). הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את $\overrightarrow{OE}$ ואת $\overrightarrow{AE}$.

א(2). הראו כי $O'N = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$.

א(3). הוכיחו כי הנקודות O' , N , K נמצאות על ישר אחד, ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $O'(0,0,3)$, $B(0,3,0)$, $A(6,0,0)$, $O(0,0,0)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות E ו- N .

ג. הראו כי משוואת המישור $A'KB'$ היא $x + 2y - 6 = 0$.

ד(1). מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

ד(2). מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$. (הדרכה: מצאו קודם את אמצע הקטע $A'B'$).

שאלה 3 · הופכי של מספר מרוכב ומתומן משוכלל

נתון המספר המרוכב $w = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$.

א. מצאו הצגה קוטבית של המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$. הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצאו את גודל הזווית AOB ואת שטח המשולש AOB .

ג. נתונות שתי משוואות: I. $z^4 = w^4$ II. $z^4 = (w \cdot \bar{w})^2$. z הוא מספר מרוכב.

ג(1). פתרו את משוואה I.

ג(2). פתרו את משוואה II.

נתון מצולע קמור שקודקדיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של שתי המשוואות.

ג(3). כמה קודקודים יש למצולע? הסבירו מדוע הוא מצולע משוכלל.

ד. חשבו את שטח המצולע.

שאלה 4 · פונקציה מעריכית ו- $1 + \frac{1}{f}$: חקירה מודרכת

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x - 5}{5}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואת האסימפטוטה האופקית שלה.

א(2). הראו כי $f(x) = \frac{(e^x - 5)(e^x + 1)}{5}$, ומצאו את נקודות החיתוך של גרף $f(x)$ עם הצירים.

א(3). מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$.

ג. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ד. הראו כי $g(x) = 0$ רק עבור $x = \ln 4$. נתון שנקודת הקיצון של $g(x)$ היא נקודת מקסימום $(\ln 2, \frac{4}{9})$. סרטטו סקיצה של גרף $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 5$.

ה. הסבירו מדוע ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי כאשר $t = \ln 4$. (היעזרו בכך שהנגזרת של הביטוי לפי t היא $g(t)$).

שאלה 5 · פונקציה מעריכית שמשיקה לציר ה- x : גרף של $\ln f$ וחסם לאינטגרל

נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואת האסימפטוטה האופקית שלה.

ב. הראו כי $f'(x) = 2e^x(e^x - 2)$, מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגה, והסבירו מדוע גרף $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ג(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג(2). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $\ln(f(x))$ ואת נקודות החיתוך של גרפה עם ציר ה- x , וסרטטו סקיצה של גרף $\ln(f(x))$.

ד. הראו כי $f(x) < 4$ לכל $x < \ln 2$, והסבירו מדוע $\int_{-2}^{-1} \ln(f(x)) dx < \ln 4$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math