

שאלה 1 · אליפסה, מעגל במוקד השמאלי ומשיק - בלי פרמטר

נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. הנקודה F היא המוקד השמאלי של האליפסה. נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק השלילי של ציר ה- x .

א. מצאו את שיעורי הנקודה F ואת משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק השלילי של ציר ה- y . הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב(1). מצאו את אורך הקטע BF ואת היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF .

ב(2). מצאו את שיעורי הנקודה D .

ג. מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה D .

ד. מצאו את המרחק בין הנקודה B ובין המשיק.

ה. בונים ריבוע שהנקודה B היא מרכזו (נקודת המפגש של אלכסוניו), ואחת מצלעותיו נמצאת על המשיק.

ה. מצאו את אורך הצלע של הריבוע ואת משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

שאלה 2 · שני מישורים עם פרמטר: ישר החיתוך, זווית ונקודות חיתוך

נתונים שני מישורים: $\pi_1 : (k+3)x + y + (k+2)z - 2 = 0$, $\pi_2 : (k+1)x + y + z + 6 = 0$, k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע לכל ערך של k המישורים אינם מקבילים.

ב(1). הראו כי עבור $k = 1$ ישר החיתוך של המישורים, ℓ_1 , מקביל לווקטור $(-1, 1, 1)$.

ב(2). מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 עבור $k = 1$.

ב(3). מצאו את הזווית בין המישורים עבור $k = 1$.

ג. עבור $k = 1$: הנקודה P היא נקודת החיתוך של ℓ_1 עם המישור $[yz]$, והנקודות A ו- B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם π_1 ועם π_2 בהתאמה. מצאו את שיעורי P, A ו- B , והיעזרו בכך שהמשולש APB נמצא במישור $[yz]$ כדי לחשב את שטחו.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: שורש ריבועי, שני מעגלים וחיתוך עם ישר

נתונה המשוואה: $z^2 = -3 + 4i$, z הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את המשוואה.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב- a_1 וב- a_2 כך ש- $a_1 < a_2$.
נתונים שני מקומות גאומטריים:

א. $|z - ia_1| = 1$

א. $|z - ia_2| = 1$

ב. מצאו את המרכז ואת הרדיוס של כל אחד מהמקומות הגאומטריים, וסרטטו את שניהם באותה מערכת צירים.

ג. מצאו את המספרים המרוכבים שמייצגים את נקודות החיתוך של הישר $y = x$ עם כל אחד מהמקומות הגאומטריים.

נסמן ב- w_1 וב- w_2 את שני המספרים שמצאתם בסעיף ג ששונים מ-0.

ד. חשבו את $w_1 \cdot \overline{w_1}$ ואת $w_2 \cdot \overline{w_2}$, ופתרו את המשוואה $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$.

שאלה 4 · חקירת פונקציה מעריכית ושטח בעזרת קדומה נתונה

נתונה הפונקציה $f(x) = e^x - \frac{9}{1-e^x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). הראו כי $f'(x) = e^x - \frac{9e^x}{(1-e^x)^2}$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הראו כי הפונקציה $F(x) = e^x - 9x + 9 \ln(e^x - 1)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ בתחום $x > 0$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \ln 4$ ו- $x = \ln 10$.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית רציונלית: חקירה מודרכת וזיהוי גרף

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^2 - 2\ln(x)}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לצירים.

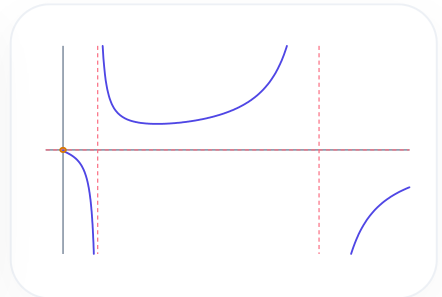
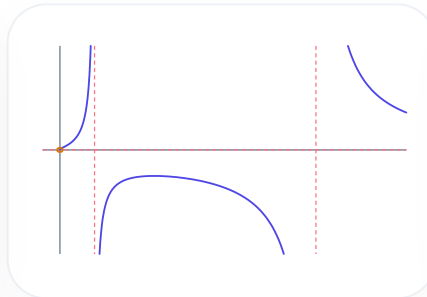
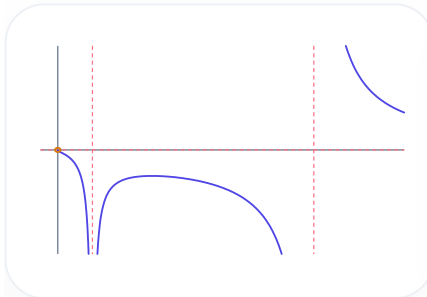
א(3). הראו כי $f'(x) = \frac{2-2\ln x}{x((\ln x)^2 - 2\ln x)^2}$, ומצאו את תחומי העלייה והירידה ואת נקודת הקיצון של $f(x)$.

ב. לפניכם שלושה גרפים. הקווים המרוסקים הם אסימפטוטות, והעיגול הריק הוא נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. איזה מהגרפים הוא הגרף של $f(x)$? נמקו.

גרף III

גרף II

גרף I



ג(1). האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 0$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מצאו את הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד.

נתונה הפונקציה $h(x) = (\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 3$. הנקודות A ו- B הן הנקודות על החלק החיובי של ציר ה- x שבהן $f(x)$ אינה מוגדרת, והנקודות C ו- D על גרף $h(x)$, כך ש- $ABCD$ מלבן.

ד. הראו כי $h(1) = h(e^2)$, ומצאו את שטח המלבן $ABCD$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math