

שאלה 1 · מעגל שקוטרו קטע, פרבולה ומשיקים מקבילים

נתונות הנקודות $A(-8,0)$ ו- $B(17,0)$. הנקודה P מקיימת $\angle APB = 90^\circ$.

א. הסבירו מדוע הנקודה P נמצאת על המעגל שקוטרו AB , ומצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו את השטח הגדול ביותר של המשולש APB .

אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית.

ג(1). מצאו את משוואת הפרבולה.

ג(2). הפרבולה והמעגל נחתכים ברביע הראשון בנקודה C . מצאו את שיעורי הנקודה C .

הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C .

ד(1). הראו כי משוואת הישר ℓ היא $3x - 4y + 24 = 0$.

ד(2). מצאו את משוואות שני המשיקים למעגל המקבילים לישר ℓ .

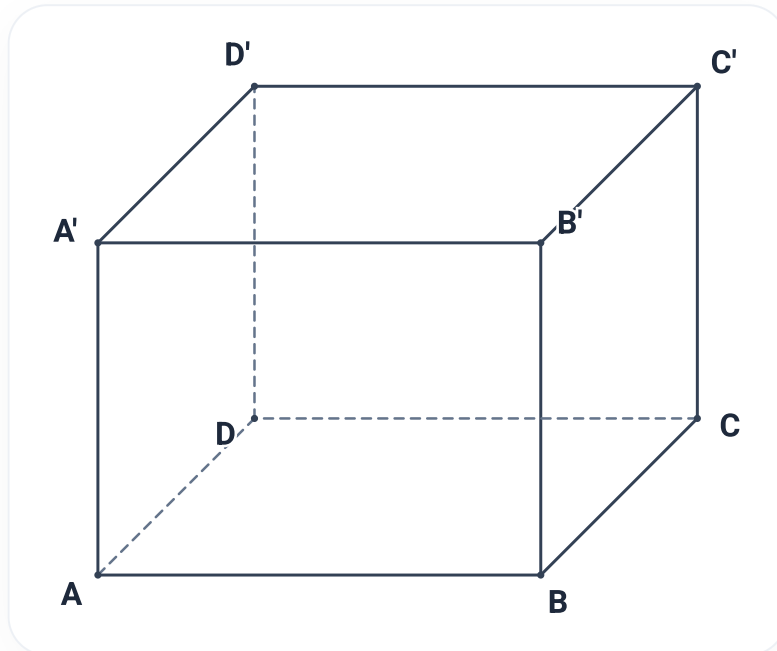
ד(3). מצאו את המרחק בין הישר ℓ לכל אחד מהמשיקים שמצאתם.

שאלה 2 · מנסרה ישרה שבסיסה ריבוע: גובה מתוך ניצבות למישור

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $ABCD A' B' C' D'$, שבסיסה הוא ריבוע $ABCD$ שאורך צלעו 6.

הנקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש: $D'F = \frac{1}{3}D'A + \frac{1}{3}D'C$.

נסמן: $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$.



א. הביעו את $\overrightarrow{D'A}$, $\overrightarrow{D'C}$ ו- $\overrightarrow{D'F}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

נתון: DF מאונך ל- $D'A$.

ב. מצאו את גובה המנסרה $|\underline{w}|$.

ג. הראו כי DF מאונך למישור ACD' , וחשבו את נפח המנסרה.

נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x , הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ד. מצאו את שיעורי הנקודה F ואת המרחק של הקודקוד D מהמישור ACD' .

שאלה 3 · שורשים מסדר 6 והזזה: מעגל, דלתון ויחס שטחים

נתונה משוואה I: $w^6 = -64$, ונתונה משוואה II: $(z - i)^6 = -64$, כאשר w ו- z הם מספרים מרוכבים.

א. פתרו את משוואה I, ורשמו את הפתרונות בהצגה אלגברית.

ב(1). הראו כי אם w הוא פתרון של משוואה I, אז $z = w + i$ הוא פתרון של משוואה II. רשמו בהצגה אלגברית את כל הפתרונות של משוואה II.

ב(2). הנקודות המייצגות את פתרונות משוואה II נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה המייצגת את i . מצאו את הרדיוס שלו ואת משוואתו.

ג(1). שני הפתרונות הממשיים ושני הפתרונות המדומים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע. הראו כי המרובע הוא דלתון.

ג(2). מצאו את היחס בין שטח המשושה שקודקודיו הם כל הפתרונות של משוואה II ובין שטח הדלתון.

שאלה 4 · חקירת מנה מעריכית והערכת אינטגרל בעזרת מיתר

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x - x}$, המוגדרת לכל x .

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

ב(1). הראו כי $f'(x) = \frac{3e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הנקודות $A(0, 1)$ ו- $B(1, f(1))$ על גרף הפונקציה.

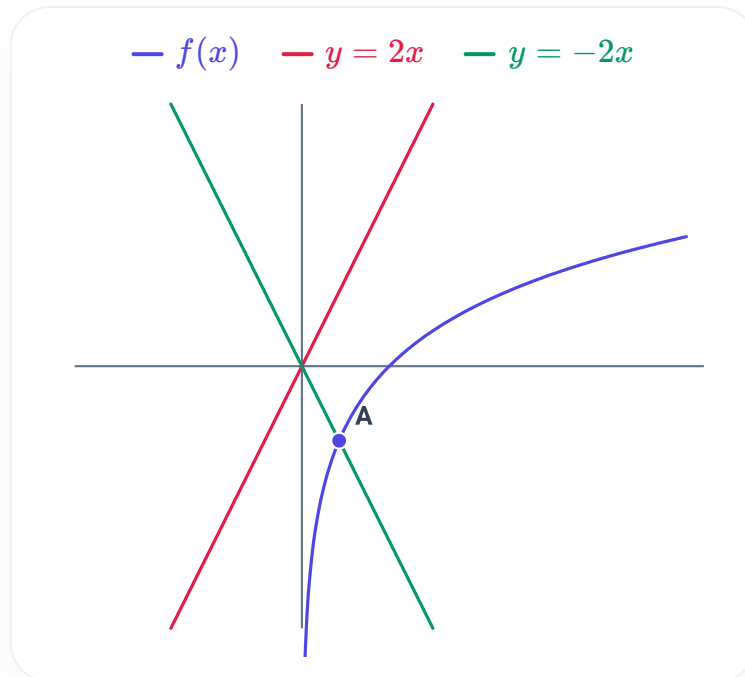
ד. חשבו את השטח של המשולש שצלעותיו נמצאות על הקטע AB , על הישר $y = 1$ ועל הישר $x = 1$.

ידוע כי בתחום $0 \leq x \leq 1$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ יורדת.

ה. האם $\int_0^1 (f(x) - 1) dx$ גדול מהשטח שמצאתם בסעיף ד? נמקו.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית ונקודת חיתוך מסרטוט: חקירה מודרכת

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה $f(x) = \ln(x)$ ($x > 0$), ומתוארים הישרים $y = 2x$ ו- $y = -2x$. הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף $f(x)$ עם הישר $y = -2x$, ושיעור ה- x שלה הוא a . נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{\ln(x)-2x}{\ln(x)+2x}$.



א(1). הסבירו מדוע תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x > 0$, $x \neq a$.

א(2). היעזרו בסרטוט, והראו שלגרף $g(x)$ אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

א(3). היעזרו בכך ש- $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ כאשר $x \rightarrow \infty$, ומצאו את האסימפטוטה האופקית של $g(x)$.

ב. הראו כי $g'(x) = \frac{4(1-\ln x)}{(\ln x+2x)^2}$.

ג. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ ואת סוגה, ואת תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

נתון: כאשר $x \rightarrow 0^+$, $g(x) \rightarrow 1$; כאשר $x \rightarrow a^-$, $g(x) \rightarrow +\infty$; כאשר $x \rightarrow a^+$, $g(x) \rightarrow -\infty$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math