

שאלה 1 · מעגל חסום במשולש ישר-זווית: צלע משיקה מקודקוד ומרכז המעגל החוסם

המעגל $(x + 1)^2 + y^2 = 20$ חסום במשולש ABC .

הצלע AB נמצאת על הישר $x + 2y + 11 = 0$, והצלע AC נמצאת על הישר $2x - y - 8 = 0$.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד A , והראו כי $AB \perp AC$.

ב. הראו כי המעגל משיק לישרים AB ו- AC .

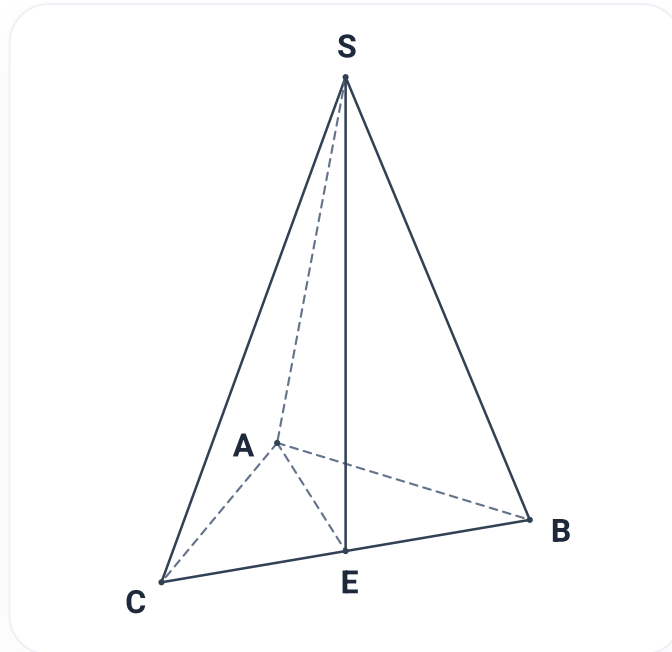
הקודקוד B נמצא על ציר ה- x .

ג. מצאו את משוואת הצלע BC .

ד. מצאו את שיעורי הקודקוד C ואת שיעורי מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC , וחשבו את המרחק בין מרכזי שני המעגלים.

שאלה 2 · פירמידה במערכת צירים: ישר מקביל, חיתוך עם מישור וחס נפחים

בסרטוט שלפניכם פירמידה משולשת $SABC$. $A(0,0,0)$, $B(3,4,0)$, $C(5,0,0)$. הנקודה E היא אמצע המקצוע BC .



א. מצאו את שיעורי הנקודה E , והראו כי $\overrightarrow{AE}$ מאונך ל- $\overrightarrow{BC}$.

נתון: הקטע SE הוא גובה בפירמידה והאורך שלו הוא 6. שיעור ה- z של הקודקוד S הוא חיובי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד S .

הנקודה F היא אמצע המקצוע SC . דרך הנקודה F מעבירים ישר המקביל לישר AC , וחותך את המישור ABS בנקודה M .

ג(1). מצאו את שיעורי הנקודה F והצגה פרמטרית של הישר FM .

ג(2). הראו כי משוואת המישור ABS היא $12x - 9y - 5z = 0$.

ג(3). מצאו את שיעורי הנקודה M .

ד. הסבירו מדוע לפירמידות $MABC$ ו- $FAEC$ יש אותו גובה, ומצאו פי כמה נפח הפירמידה $MABC$ גדול מנפח הפירמידה $FAEC$.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: שורשים ומשושה משוכלל

נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא 17. $z_1 = -4 + i$.

א. מצאו את המספר z_2 .

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$. נתון כי z^3 הוא מספר ממשי חיובי.

ג. מצאו את שלוש האפשרויות של המספר z .

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב ושלושת המספרים שמצאתם בסעיף ג, מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד(1). סרטטו את המצולע במערכת צירים.

ד(2). חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב: $3(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$. מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו את שטח המצולע החדש.

שאלה 4 · שתי פונקציות מעריכיות: חקירה, זיהוי גרפים ושטח

$$\text{נתונות הפונקציות } f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-6e^x+5} \text{ ו- } g(x) = \frac{6e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$$

א(1). מצאו את תחום ההגדרה המשותף של הפונקציות.

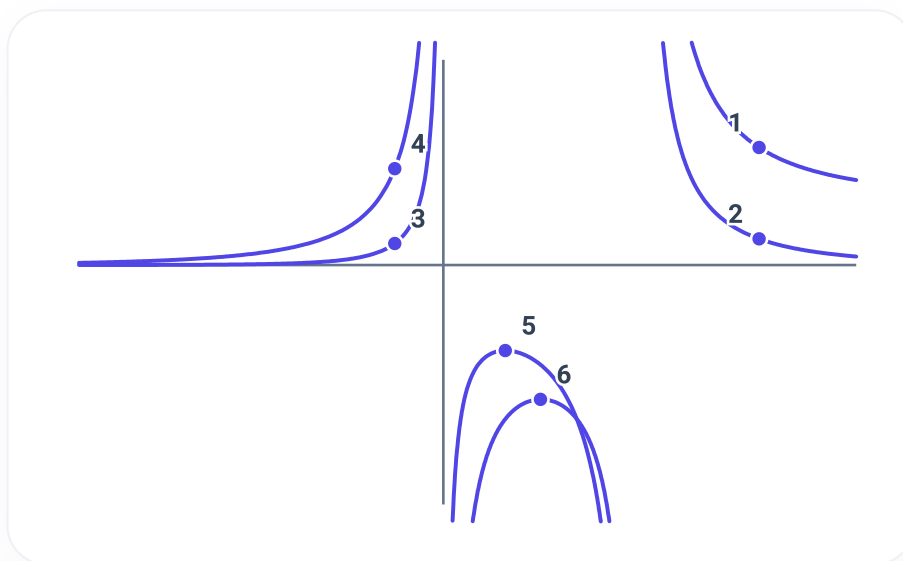
א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(3). הראו כי $f'(x) = \frac{4e^{2x}(5-3e^x)}{(e^{2x}-6e^x+5)^2}$, ומצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$.

ג(1). הראו כי $f(x) - g(x) = \frac{2e^{2x}-6e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$, וכי המונה של הביטוי הוא הנגזרת של המכנה שלו.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות. כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בספרה.



ג(2). רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים. נמקו בעזרת הסימן של $f(x) - g(x)$ בכל קטע ובעזרת סעיף ב.

ד. היעזרו בסעיף ג(1) וחשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ ובין הישרים $x = \ln 6$ ו- $x = \ln 10$.

שאלה 5 · חקירת $6 \ln(x^2 + 5) - 2x$ והפונקציה $\ln(f(x) - 10)$ בהכונה

נתונה הפונקציה: $f(x) = 6 \cdot \ln(x^2 + 5) - 2x$, המוגדרת לכל x .

א. הראו כי $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-5)}{x^2+5}$, ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת סוגן.

ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של $f(x)$.

ידוע כי $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. (בדקו לאן שואפת f כאשר $x \rightarrow \pm\infty$).

ד(1). כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 10$? היעזרו בערכי הקיצון ובהתנהגות בקצוות.

נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(f(x) - 10)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x) > 10$.

ד(2). הסבירו מדוע לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית בכל אחד מהפתרונות של סעיף ד(1), ומצאו את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$ ואת סוגה.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math