

שאלה 1 · פרבולה ואליפסה עם מוקד משותף: טרפז חסום במעגל (מספרי)

הנקודה $F(3, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. אורך הציר הראשי של האליפסה הוא 18.

א. מצאו את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

ב. המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בנקודות A ו- B . הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B .

ג. מצאו את משוואת המדריך של הפרבולה ואת שיעורי הנקודות A ו- B .

ד. הישר $x = 3$ עובר במוקד F וחותך את הפרבולה בנקודות C ו- D . הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D .

ה. מצאו את שיעורי הנקודות C ו- D .

ו. הראו כי המרובע $ABDC$ הוא טרפז שווה-שוקיים, והסבירו מדוע יש מעגל שעובר דרך ארבעת הקודים שלו. (1)

ז. הסבירו מדוע מרכז המעגל נמצא על ציר ה- x , ומצאו את שיעורי המרכז ואת רדיוס המעגל. (2)

שאלה 2 · ישר ומישור עם פרמטר: צעד אחר צעד

נתונים הישר ℓ והמישור π . ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא: $\underline{x} = (5, -6, 5) + t \cdot (m, 4 - m, -2)$. משוואת המישור π היא: $2x + my + (m + 5)z + 3 = 0$. m הוא פרמטר.

א. הראו כי המכפלה הסקלרית של וקטור הכיוון של ℓ בווקטור הנורמל של π היא $-m^2 + 4m - 10$, והסבירו מדוע לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .

ב. נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותר אותו בנקודה A .

ג. כאשר ישר ניצב למישור, וקטור הכיוון שלו מקביל לנורמל. פתרו את המשוואה $\frac{m}{2} = \frac{4-m}{m}$, ובדקו עבור כל פתרון אם ℓ ניצב ל- π . מהו m ?

ד. מצאו את שיעורי הנקודה A .

ה. בדקו אם הנקודה $Q(9, -14, 7)$ נמצאת על הישר ℓ , וקבעו כמה מישורים מכילים את הישר ℓ ועוברים דרך Q . נמקו.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית: זווית, שורשים רביעיים ושטח משולש

נתונים שלושה מספרים מרוכבים: $z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ))$, $w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, $r > 0$.
א. הראו כי $w = -\sin 2\alpha + i(\cos 2\alpha - r^2)$.

הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה- x של A הוא $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ב. מצאו את הערך של α .

נתון: $r = 1$.

ג. כתבו את w בהצגה קוטבית.

ד. פתרו את המשוואה $z^4 = 16 \cdot (z_1 \cdot w)^2$.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הנקודה B מייצגת את הפתרון שנמצא ברביע הראשון, והנקודה C מייצגת את הפתרון שנמצא ברביע השני.

ה. חשבו את שטח המשולש OBC.

שאלה 4 · פונקציה לוגריתמית: חקירה, $\frac{1}{f}$ ושטח (בלי פרמטר)

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\ln(x)-1}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). הראו כי $f'(x) = \frac{\ln(x)-2}{(\ln(x)-1)^2}$, ומצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגה.

נתון: כאשר $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow 0$.

א(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת נקודת הקיצון שלה, וקבעו את סוגה.

ג. הראו כי $G(x) = \frac{(\ln(x)-1)^2}{2}$ היא פונקציה קדומה של $g(x)$ בתחום $x > e$, וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $g(x)$, ציר ה- x והישרים $x = e^2$ ו- $x = e^3$.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית אי-זוגית: קיצון, $1/f$ וחיתוך

נתונה הפונקציה $f(x) = x(\ln(x^2) - 3)$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת נקודות החיתוך של הגרף שלה עם ציר ה- x .

א(2). הוכיחו כי $f(x)$ אי-זוגית.

ב(1). הראו כי $f'(x) = \ln(x^2) - 1$, ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת סוגן.

ב(2). סרטטו סקיצה של גרף $f(x)$.

ג(1). נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה שלה ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ג(2). הסבירו מדוע הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בדיוק בנקודות שבהן $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$. היעזרו בסקיצה של $f(x)$ ומצאו בכמה נקודות הגרפים נחתכים.

ד. הראו כי $G(x) = \frac{1}{2} \ln |\ln(x^2) - 3|$ היא פונקציה קדומה של $g(x)$.

כל הברויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math