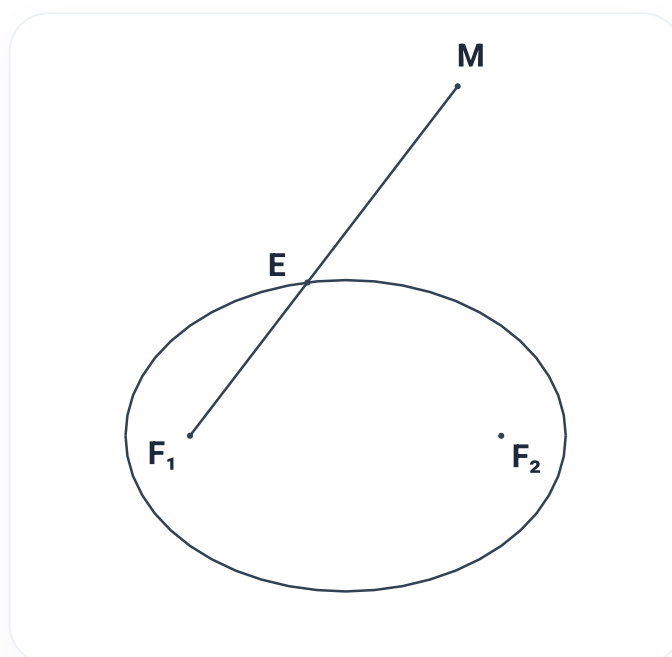


שאלה 1 · אליפסה: מקום גאומטרי, מקדם כיווץ לפי מוקדים והיקף קבוע

נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b הוא פרמטר חיובי, והמוקדים שלה על ציר ה- x . נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2 , את המוקד השמאלי ב- F_1 ואת המוקד הימני ב- F_2 . נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע. הוא ריבוע.



א. מצאו את הערך של b ואת שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

ב. נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה. ממשיכים את הקטע F_1E מעבר ל-E עד לנקודה M, כך שמתקיים $EM = EF_2$. מצאו את המקום הגאומטרי של הנקודות M ונמקו.

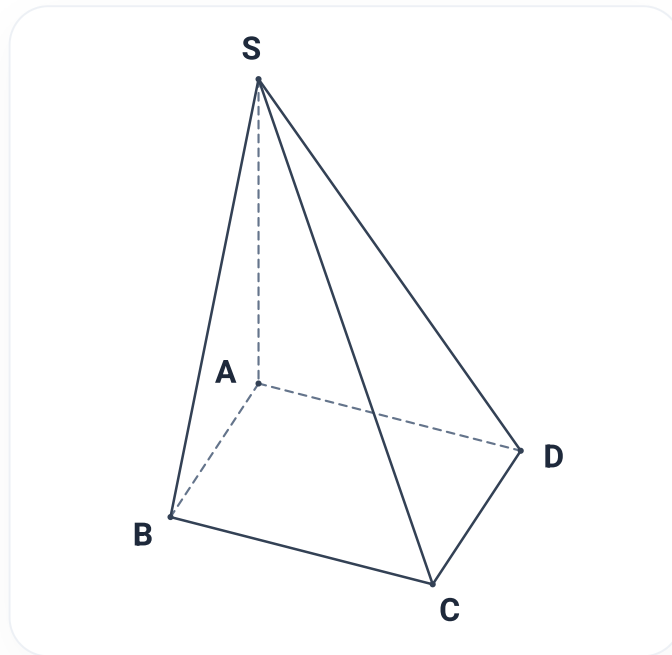
ג. מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב-3 יחידות. אחר כך מכפילים את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל שהתקבל במספר k , $0 < k < 1$, ומתקבלת אליפסה. ידוע כי המוקדים של האליפסה שהתקבלה הם הקודקודים של האליפסה הנתונה שעל ציר ה- x . מצאו את k ואת משוואת האליפסה שהתקבלה.

ד(1). נתון משולש ששניים מקודקודיו הם המוקדים של האליפסה שמצאתם בסעיף ג, והקודקוד השלישי P נמצא על האליפסה הזאת (ולא על ציר ה- x). הוכיחו כי היקף המשולש אינו תלוי במיקום של P, ומצאו אותו.

ד(2). מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש מסעיף ד(1).

שאלה 2 · פירמידה שבסיסה מקבילית: ניצבות ומישור המקביל למקצוע

נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית. SA הוא גובה הפירמידה. הנקודה N היא אמצע המקצוע SC. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.



א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{BN}$.

נתון כי $\vec{BN}$ מאונך ל- $\vec{AC}$.

ב. הוכיחו כי $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

נתון: $A(0,0,0)$, $D(10,0,0)$, $S(0,0,8)$, $B(6,p,0)$, $p > 0$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C.

דרך האלכסון BD מעבירים מישור המקביל למקצוע SC. המישור חותך את המקצוע SA בנקודה K.

ד. מצאו את משוואת המישור.

ה. הנקודה M היא נקודת מפגש האלכסונים של הבסיס. לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מן הטענות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I הישר KM מקביל לישר SC.

II כל ישר שמאונך למישור BDK, מאונך לישר SC.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: תנאי עם חזקה כללית ומצולע בן 12 צלעות

נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא $-21 - 12i$. $z_1 = 3 - 2i$. נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את z_2 ואת פתרונות המשוואה.

ב. נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, ו- $n \geq 2$ מספר טבעי. נתון כי המספרים z ו- z^n נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. הביעו באמצעות n את מספר האפשרויות של z .

ד. מצאו את הערך הקטן ביותר של n שבעבורו כל פתרונות המשוואה מסעיף א הם בין המספרים z של סעיף ב.

ה. הציבו את הערך של n שמצאתם בסעיף ג. המספרים z של סעיף ב מייצגים את הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ו. חשבו את שטח המצולע.

ז. מכפילים כל אחד מקודקודי המצולע של סעיף ד במספר המרוכב $u = m(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $m > 0$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$. מתקבל מצולע ששטחו 108, ואחד מקודקודיו הוא המספר $3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$.

ח. מצאו את m ואת כל הערכים האפשריים של α .

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר והפונקציה $1/f$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - b}{(e^x - 2)^2}$, b הוא פרמטר חיובי, $b \neq 2$.

ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה: $x = \ln(4)$.

ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ו. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים.

ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. מהו שיעור ה- y של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו אם הערך של: $\int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ קטן או גדול מ- $\frac{7}{12}$. נמקו את קביעתכם.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית עם פרמטר: קיצונים על עקומה אחת ובעיה הפוכה

נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a+\ln x}{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x}$, המוגדרות בתחום $x > 0$. a הוא פרמטר.

א. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x)$ באמצעות a . על איזו עקומה נמצאות כל נקודות הקיצון של $f(x)$ כאשר a משתנה?

נתונה הפונקציה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$, שגרפה עובר בנקודה $(1, 0)$, ונגזרתה מקיימת $h'(x) = f(x) - g(x)$.

ב. מצאו את $h(x)$ באמצעות a .

ג. מצאו, באמצעות a , את כל ערכי m שעבורם למשוואה $h(x) = m$ יש בדיוק שני פתרונות.

נתון כי הערך הקטן ביותר של $h(x)$ הוא -8 , ושתי נקודות החיתוך של גרף $h(x)$ עם ציר ה- x נמצאות בתחום $x \geq 1$.

ד. מצאו את הערך של a ואת $h(x)$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math