

שאלה 1 · מקום גאומטרי של אמצע היתר: פרבולה אנכית, משיק ומעגל

במשולש ישר זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$), שיעורי הקודקוד A הם: $(0, a)$, a הוא פרמטר שונה מאפס. שיעור ה- y של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה- y . הנקודה M היא אמצע הצלע BC .

א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M .

ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א. סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.

באחת מן הנקודות M , שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC .

נתון גם כי: $AM = 13$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר: $y = -4$.

ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו- C .

דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו- AC .

ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.

שאלה 2 · שני מישורים עם פרמטר: מתי ישר החיתוך פוגש מישור, ושטח כפונקציה של k

נתונים שני מישורים: $\pi_1: (k+1)x + y + (k-1)z + 6 = 0$, $\pi_2: kx + y + z - 2 = 0$, k הוא פרמטר. נסמן ב- ℓ את ישר החיתוך של המישורים.

א. הסבירו מדוע לכל ערך של k המישורים נחתכים.

ב(1). מצאו את הערך של k שעבורו הישר ℓ אינו נחתך עם המישור $[yz]$. נמקו.

ב(2). עבור $k \neq 2$, הנקודה P היא נקודת החיתוך של ℓ עם המישור $[yz]$. הביעו את שיעורי P באמצעות k .

ג. הנקודות A ו- B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם π_1 ועם π_2 בהתאמה. מצאו את הערכים של k שעבורם שטח המשולש APB הוא 16.

ד. מצאו את הזווית בין המישורים עבור כל אחד מהערכים של k שמצאתם בסעיף ג.

שאלה 3 · שורשים מסדר 4, נקודות על ישר דרך הראשית ושטח מרובע במישור גאוס

נתונה המשוואה: $z^4 = -81$. z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים: $w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $w_2 = 3r \cdot (\cos 5\alpha + i \cdot \sin 5\alpha)$, $30^\circ < \alpha < 100^\circ$. שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו- w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α .

נתון כי w_1 הוא אחד מהפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r .

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{6}{i}$. $ABCD$ הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1 , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3 , הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2 , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4 .

ד. הראו כי שטח המרובע $ABCD$ הוא $30\sqrt{2}$.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E , שמיוצגת על ידי המספר u , נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA . נתון כי $|u| > 1$, $\bar{u} + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}(\cos 292.5^\circ + i \cdot \sin 292.5^\circ)$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u .

שאלה 4 · מנה מעריכית עם פרמטר: מספר פתרונות וחסמים לאינטגרל

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + ax}{e^x - x}$, המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > -1$.

א. הביעו באמצעות a את משוואות האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לצירים, ואת שיעורי נקודת הקיצון של $f(x)$. קבעו את סוגה.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y הוא 4.

ב. מצאו את a ואת משוואת המשיק.

הציבו $a = 3$.

ג. מצאו, לפי ערכי m , כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = m$.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שתי נקודות פיתול, ואחת מהן היא נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y .

ד. הוכיחו כי $\frac{2}{e-1} < \int_0^1 (f(x) - 1) dx < 2$.

שאלה 5 · חקירת פונקציה לוגריתמית, $\ln(-f)$ והשוואת אינטגרלים בלי חישוב

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

א(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(-f(x))$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ב(3). מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- a את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I-II קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a). נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+2}^{a+3} (g(x) - f(x)) dx$

II. $\int_{a+5}^{a+6} (g(x) - f(x)) dx$

III. המספר 1.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math