

שאלה 1 · אליפסה לא ידועה, משיק וריבוע שמרכזו בקודקוד

נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{144} = 1$, $a > 12$. הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה. נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x . הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y , והנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל. נתון: $BD : DF = 4 : 1$.

א. מצאו את הערך של a ואת משוואת המעגל.

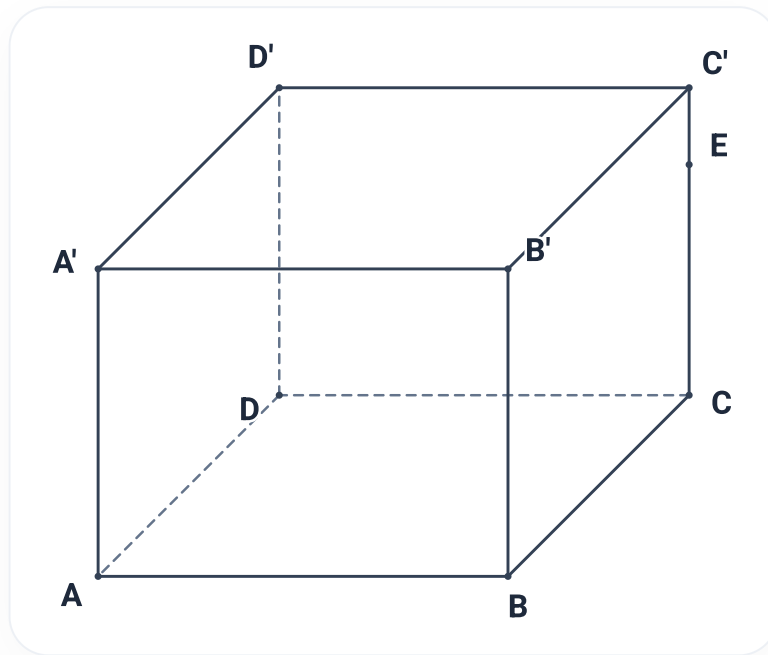
ב. מצאו את שיעורי הנקודה D ואת משוואת המשיק למעגל בנקודה D .

ג. בונים ריבוע שהנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוניו, ואחת מצלעותיו נמצאת על המשיק שמצאתם בסעיף ב. מצאו את משוואות הישרים שעליהם נמצאות ארבע הצלעות של הריבוע.

ד. האם מרכז האליפסה $O(0,0)$ נמצא בתוך הריבוע? האם המוקד השמאלי של האליפסה נמצא בתוך הריבוע? נמקו.

שאלה 2 · וקטורים בתיבה: נקודה במישור אלכסוני, אנך ומרחק

בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A' B' C' D'$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AA' = \underline{w}$. הנקודה E נמצאת על המקצוע CC' כך ש- $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CC'}$.



א. הביעו את $\overrightarrow{EB}$ ו- $\overrightarrow{ED}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

הנקודה M מקיימת: $\overrightarrow{CM} = -\frac{4}{9}\underline{u} - \frac{1}{9}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

ב. הביעו את $\overrightarrow{EM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EB} + b \cdot \overrightarrow{ED}$. a ו- b הם פרמטרים.

ג(1). מצאו את הערך של a ואת הערך של b .

ג(2). האם הנקודה M נמצאת במישור BDE ? נמקו את תשובתכם.

נתון כי $|\underline{w}| = 4$ והווקטור $\overrightarrow{CM}$ מאונך למישור BDE .

ד. מצאו את הערך של $|\underline{u}|$ ואת הערך של $|\underline{v}|$.

ה. חשבו את המרחק בין הנקודה C ובין המישור BDE .

שאלה 3 · שורשים מסדר 6: מציאת מרכז ההזזה משני פתרונות ידועים

נתונה משוואה I: $w^6 = -64$. נתונה משוואה II: $(z - c)^6 = -64$, כאשר c הוא מספר מרוכב קבוע ו- z מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I, ורשמו את הפתרונות בהצגה אלגברית.

ב(1). הסבירו מדוע לכל c הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל, ומצאו את מרכז המשושה ואת אורך צלעו.

ב(2). ידוע כי $z = 0$ ו- $z = 2\sqrt{3}$ הם פתרונות של משוואה II. מצאו את כל הערכים האפשריים של c .

ג(1). הציבו את הערך של c שהחלק המדומה שלו חיובי. רשמו בהצגה אלגברית את כל הפתרונות של משוואה II, ומצאו את משוואת המעגל שעליו הם נמצאים.

ג(2). הפתרונות של משוואה II שהנקודות המייצגות אותם נמצאות על צירי מישור גאוס הם קודקודים של משולש. מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המשולש.

שאלה 4 · פונקציה ונגזרת: $f = g'$, חקירה, שטח ואינטגרל

נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x) = \frac{x^2+2x-7}{e^x}$ המוגדרות לכל x . a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו: $f(x) = g'(x)$ לכל ערך של x .

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב-ה שלפניכם.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב(3). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_3^4 \left(\frac{e^{2x}}{(x^2+2x-7)^2} \right) \cdot \left(\frac{x^2-9}{e^x} \right) dx$.

שאלה 5 · משפחת פונקציות מעריכיות: מספר אפסים ותחום של $\ln f$ לפי פרמטר

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 2e^x + m$, m הוא פרמטר.

א. מצאו, באמצעות m , את נקודת הקיצון של $f(x)$ ואת משוואת האסימפטוטה האופקית שלה.

ב. מצאו את כל הערכים של m שבעבורם למשוואה $f(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

נתון: $m = \frac{3}{4}$.

ג. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $\ln(f(x))$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ד. מצאו את כל הערכים של m שבעבורם הפונקציה $\ln(f(x))$ מוגדרת לכל x , ולגרף שלה יש נקודה משותפת עם ציר ה- x .

כל הברריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math