

**שאלה 1 · שני מעגלים משיקים ביחס 1:3: משיקים משותפים**

נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ. מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה  $M$  ומשוואתו היא:  
 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ ,  $a$  הוא פרמטר חיובי. מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה  $N$  ומשוואתו היא:  
 $(x - 10)^2 + y^2 = R^2$ . אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 8, והיחס בין אורכי הרדיוסים של  
 המעגלים הוא:  $1 : 3 : R$ ,  $r < R$ .

**א.** מצאו את משוואת המעגל שמרכזו  $N$  ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו  $M$ .

נתון כי:  $a < 10$ .

**ב.** סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

**ג.** מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

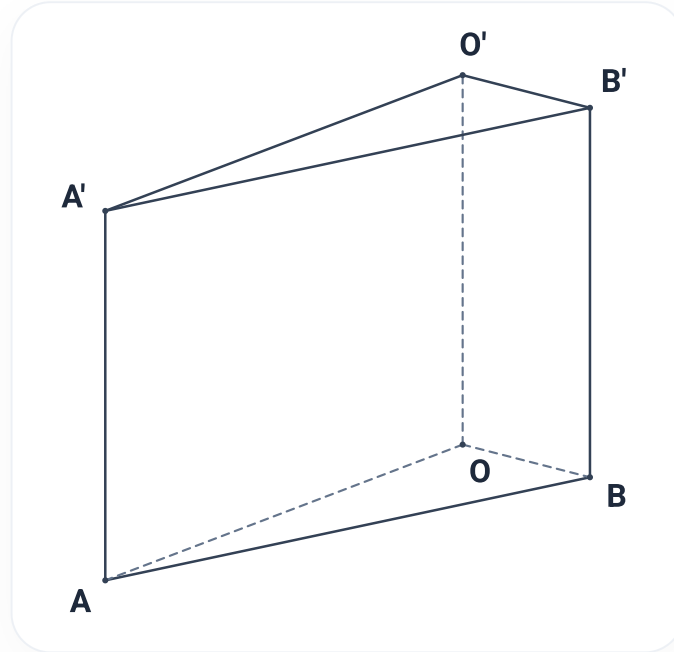
**ד.** הישר:  $mx - y + n = 0$  הוא משיק משותף לשני המעגלים. מצאו את  $m$  ואת  $n$  (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ. משוואות המעגלים הן:  $(x - k)^2 + y^2 = R^2$ ;  $(x - t)^2 + y^2 = r^2$ ,  $t$  ו- $k$  הם פרמטרים. ערכי הרדיוסים  $r$  ו- $R$  זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

**ה.** האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את  $t$  ואת  $k$ . אם לא – נמקו.

## שאלה 2 · מנסרה משולשת: מציאת יחס ומציאת גובה מנפח

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה  $AOBA'O'B'$  שבסיסה  $AOB$  הוא משולש ישר-זווית ( $\angle AOB = 90^\circ$ ). הנקודה  $K$  היא אמצע המקצוע  $AB$ . הנקודה  $E$  נמצאת על הקטע  $O'B$  כך ש-  $O'E = s \cdot O'B$ , הנקודה  $N$  נמצאת על הקטע  $AE$  כך ש-  $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AE}$ . נסמן:  $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$ ,  $OO' = \underline{w}$ .  $0 < s < 1$ .



א. הביעו את  $O'N$  באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו-  $s$ .

ב. מצאו את הערך של  $s$  שעבורו הנקודות  $O'$ ,  $N$ ,  $K$  נמצאות על ישר אחד, ואת היחס בין  $O'K$  ובין  $O'N$  בעבור ערך זה.

הציבו  $s = \frac{1}{4}$ . נתון:  $O(0,0,0)$ ,  $A(12,0,0)$ ,  $B(0,5,0)$ . הקודקוד  $O'$  נמצא על החלק החיובי של ציר ה- $z$ , וגובה המנסרה אינו ידוע.

ג. מצאו את משוואת המישור  $A'KB'$ . האם היא תלויה בגובה המנסרה? נמקו.

נתון כי נפח הפירמידה  $NA'KB'$  הוא 48.

ד. מצאו את שיעורי הנקודות  $O'$  ו-  $N$ .

### שאלה 3 · מספר מרוכב ברביע הרביעי: ארגומנט מהמנה בצמוד, מודול, דה-מואבר ודלתון במישור גאוס

המספר:  $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$  נמצא במישור גאוס ברביע הרביעי.

נתון:  $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

א. מצאו את  $\alpha$ .

נתון:  $|3iz| - \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| + \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 5$ .

ב. מצאו את  $R$ .

ג. נתונה המשוואה:  $w^9 = \frac{z^6}{64}$  ( $z$  הוא המספר שמצאתם). הראו כי המספר  $\frac{z}{\bar{z}}$  הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים:  $\frac{z}{\bar{z}}$  ו-  $\frac{\bar{z}}{z}$ . קודקוד הראש A מתאים למספר  $k + z$ ,  $k$  הוא מספר מדומה טהור.

ד(1). מהו הערך של  $k$ ?

ד(2). חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

### שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם שתי אסימפטוטות: מספר פתרונות ושטח הפוך

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 6e^x + 8}$ .

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של  $f(x)$  ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

א(2). מצאו את תחומי העלייה והירידה של  $f(x)$  ואת נקודת הקיצון שלה.

ב. נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 8}$ . מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

ג. מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = m$  לכל ערך של  $m$ .

ד. השטח הכלוא בין הגרפים של  $f(x)$  ו-  $g(x)$  ובין הישרים  $x = \ln 5$  ו-  $x = \ln d$  ( $d > 5$ ) שווה ל-  $\ln 3$ . מצאו את  $d$ .

**שאלה 5 · חקירת  $3e^x - x + 4 \ln(3 - e^x)$ , גרף הנגזרת ופרמטר**

נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3e^x - x + 4 \cdot \ln(3 - e^x)$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

א.2. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ב. הראו כי:  $f'(x) = \frac{-3(e^x-1)^2}{3-e^x}$ .

ג.1. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ג.2. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  המקביל לציר ה- $x$ .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה.1. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ה.2. לפונקציה  $f$  יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $x < \ln 3$ .

נתונה הפונקציה  $g(x) = f(x) + ax$ , שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  $a$  הוא פרמטר.

א. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , ומצאו עבור אילו ערכים של  $a$  יש לפונקציה  $g(x)$  שתי נקודות קיצון. נמקו את תשובותיכם.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: [www.guyai.co.il/bagrut/math](http://www.guyai.co.il/bagrut/math)