

שאלה 1 · מעגל משתנה סביב מוקד הפרבולה: מהיחס בין מרחקים לפרמטר

נתונות הנקודות $A(4 - a, 0)$ ו- $B(4 + a, 0)$, כאשר $a > 4$ הוא פרמטר. הנקודה P מקיימת $\angle APB = 90^\circ$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P . הביעו באמצעות a .

אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית. הפרבולה והמעגל נחתכים ברביע הראשון בנקודה C .

ב. הביעו באמצעות a את שיעורי הנקודה C .

הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C .

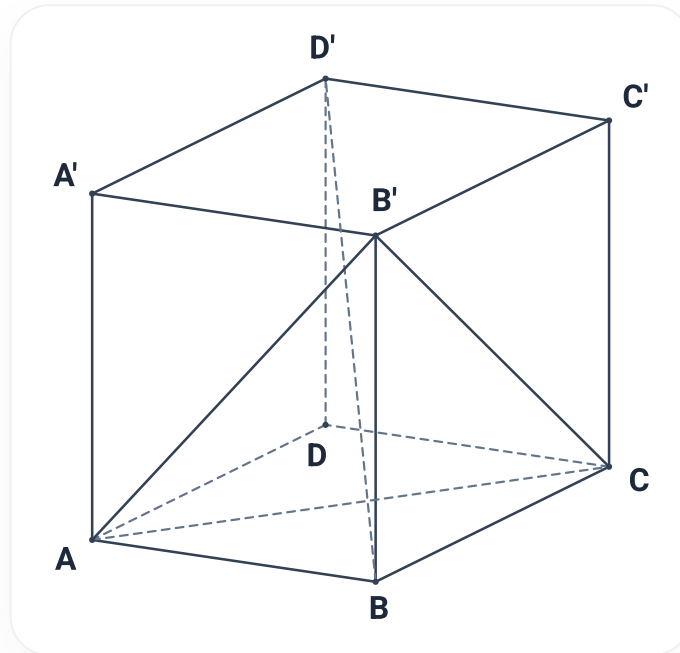
ג. הביעו באמצעות a את המרחק של מרכז המעגל מהישר ℓ .

מעבירים שני משיקים למעגל המקבילים לישר ℓ . נתון כי המרחק בין ℓ לאחד המשיקים גדול פי 3 מהמרחק בין ℓ למשיק האחר.

ד. מצאו את הערך של a , ואת המרחקים בין ℓ לשני המשיקים.

שאלה 2 · וקטורים בקובייה: האלכסון BD' והמשולש ACB'

בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה $ABCD A'B'C'D'$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.



א. הוכיחו כי האלכסון BD' מאונך למישור ACB' .

נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש ACB' .

ב(1). הביעו את הווקטור $\overrightarrow{BE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב(2). הוכיחו כי הנקודות B, E ו- D' נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0,0,0)$, $C(5,12,0)$, $A(12,n,p)$, n ו- p הם פרמטרים. שיעור ה- z של הנקודה B' הוא חיובי.

ג(1). מצאו את שיעורי הנקודה A, והוכיחו כי ABCD נמצא במישור $z = 0$.

ג(2). מצאו את שיעורי הנקודה B' .

ד. ℓ הוא ישר החיתוך בין המישור ACB' ובין המישור $ABB'A'$.

ה. מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ .

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר ℓ ואינו חותך את ציר ה- y .

שאלה 3 · מרוכבים: נקודה על המעגל בכיוון המרכז, סדרה מסתובבת ושטחי משולשים

$z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס המקיימות:
 $|i\bar{z} + 8 - 6i|^2 - |12i| = |-5 + 12i|$

הנקודה M היא מרכז המעגל. הנקודה A נמצאת על המעגל, ולמספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט.

ב. מצאו את שתי האפשרויות לנקודה A .

נתון כי A היא הנקודה הקרובה יותר לראשית. נתונה סדרה הנדסית: $z_1, z_2, z_3, \dots$, שבה $z_1 = z_A$ ו- $z_5 = z_M$.

ג. מצאו את כל המנות האפשריות של הסדרה, וקבעו עבור אילו מהן כל איברי הסדרה נמצאים על ישר אחד. נמקו.

ד. עבור $q = \sqrt[4]{2}i$: הוכיחו כי לכל n המשולש שקודקדיו הם ראשית הצירים O והנקודות המייצגות את z_n ו- z_{n+1} הוא ישר-זווית, ומצאו את הערך הקטן ביותר של n שבעבורו שטחו גדול מ-1000.

שאלה 4 · פונקציות מעריכיות: חיתוכי שני גרפים קובעים את הקיצון של מנה

נתונה הפונקציה: $k(x) = (x - 2)e^x$, ונתונה הפונקציה: $m(x) = e^x - 1$, המוגדרות לכל x .

א(1). מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y בעבור כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$.

א(2). מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ (אם יש כאלה).

א(3). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ עם ציר ה- y .

הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה אחת שבה: $x = c$ ונקודה נוספת שבה: $x = d$, $d > c$.

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $k(x)$ ושל גרף הפונקציה $m(x)$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 2}$, המוגדרת לכל $x \neq 2$.

ג(1). מצאו את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ג(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ד. הסבירו מדוע למשוואה: $f'(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

ה(1). הסבירו מדוע $2 < d$.

ה(2). הביעו באמצעות c ו- d את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית עם פרמטר: מספר החיתוכים של f ו- $1/f$

נתונה הפונקציה $f(x) = ax (\ln(x^2) - 1)$, כאשר $a > 0$ פרמטר. נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x , והוכיחו שהיא אי-זוגית.

א(2). הביעו באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את משוואות האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לצירים.

ג. מצאו את מספר נקודות החיתוך של הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$, לפי ערכי a .

ד(1). מצאו פונקציה קדומה של $g(x)$ (בטאו אותה באמצעות a).

ד(2). השטח המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$, ציר ה- x והישרים $x = e$ ו- $x = e^2$ שווה ל- $\ln 3$. מצאו את a , ומצאו את מספר נקודות החיתוך של הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ עבור ערך זה.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math