

שאלה 1 · שני מעגלים משיקים: משיקים משותפים וזוג מעגלים נוסף

נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ. מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא:
 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, a הוא פרמטר חיובי. מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא:
 $(x - 15)^2 + y^2 = R^2$. אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של
 המעגלים הוא: $1 : 2$, $r < R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M .

נתון כי: $a < 15$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים. מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ. משוואות המעגלים הן: $(x - k)^2 + y^2 = R^2$; $(x - t)^2 + y^2 = r^2$, t ו- k הם פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו- R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k . אם לא – נמקו.

שאלה 2 · ריבוע במרחב ופירמידה: משוואת מישור, קודקוד על ישר וזווית בין מישורים

נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור: $A(4, p, -1)$, $B(7, 5, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(-2, 5, -4)$, p הוא פרמטר.

א. מצאו את משוואת המישור $ABCD$.

ב. חשבו את ערך הפרמטר p .

ג. הוכיחו כי המרובע $ABCD$ הוא ריבוע.

הנקודה S היא קודקוד של פירמידה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$. המקצוע SC מונח על הישר:
 $\underline{x} = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$. נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).

נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC .

ה. מצאו את הזווית שבין המישור $ABCD$ ובין המישור π .

שאלה 3 · משוואה במספרים מרוכבים, ריבוע חסום וסיבוב קודקודים

נתונה המשוואה: $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב. z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .

ב. חשבו את שטח הריבוע.

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס. נתון: $r_1 \neq r_2$, r_1 ו- r_2 חיוביים.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.

ה. חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

שאלה 4 · חקירת פונקציה מעריכית ומנה שהנגזרת שלה נשענת עליה

נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א(1). מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

א(3). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x .

ב(1). מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .

ב(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

ב(3). הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = -1$.

שאלה 5 · חקירת פונקציה לוגריתמית, גרף הנגזרת ו- e בחזקת הפונקציה

נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

א(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

ב(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה: $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג(1). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג(2). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה: $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים: $x = -6$ ו- $x = -5$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math