

שאלה 1 · מרכזי מעגלים על אנך אמצעי, אליפסה ממוקדים על ציר ה- x ויחס שטחים

נתונות הנקודות $A(-5, 3)$ ו- $B(0, -2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם. נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M .

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב- F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו- T , ואת המעגל M בנקודות K ו- L .

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF .

שאלה 2 · פירמידה שמקצועותיה מאונכים בקודקוד: גובה, נקודה לפי נפח, ישר ומישור

נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC. נסמן: $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{w}$. נתון: $\overrightarrow{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$. הנקודה H מקיימת: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$, $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$. t, s ו- k הם פרמטרים. נתון כי $\overrightarrow{OH}$ מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה- x , הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה- y , והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה- z . נתון: $|\underline{u}| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

שאלה 3 · מספר מרוכב ברביע השלישי: ארגומנט מהמנה בצמוד, מודול, דה-מואבר ודלתון במישור גאוס

המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

נתון: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. מצאו את α .

נתון: $|2iz| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| - \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 8$.

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם). הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$. קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

ד(1). מהו הערך של k ?

ד(2). חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

שאלה 4 · חקירת $x^2 e^{a-x^3}$: פרמטר משטח מתחת לגרף הנגזרת, ופונקציה קדומה ונקודות הפיתול שלה

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א(1). מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

א(2). מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד(1). מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

ד(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב-B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

שאלה 5 · פונקציה אי-זוגית לפי תכונות, $\ln f(x)$, וקדומה זוגית של $\frac{4x}{1+x^2}$

נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $(-1, -a)$, a , הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

ב(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ב(3). מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג(1). מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ג(2). האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^5 g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx$? נמקו.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math