

שאלה 1 · אליפסה, פרבולה ומעגל: מוקדים, משיק והיקף משולש

נתונה אליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144-4k^2} = 1$, $0 < k < 6$. הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו- F_2 .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה נמצא בנקודה F_1 , כך שמתקיים: $AF_1 = 10k$.

ב(1). הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

ב(2). הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

AF_1 הוא קוטר במעגל הישר שמשוואתו: $5x + 12y = 138$ משיק למעגל זה.

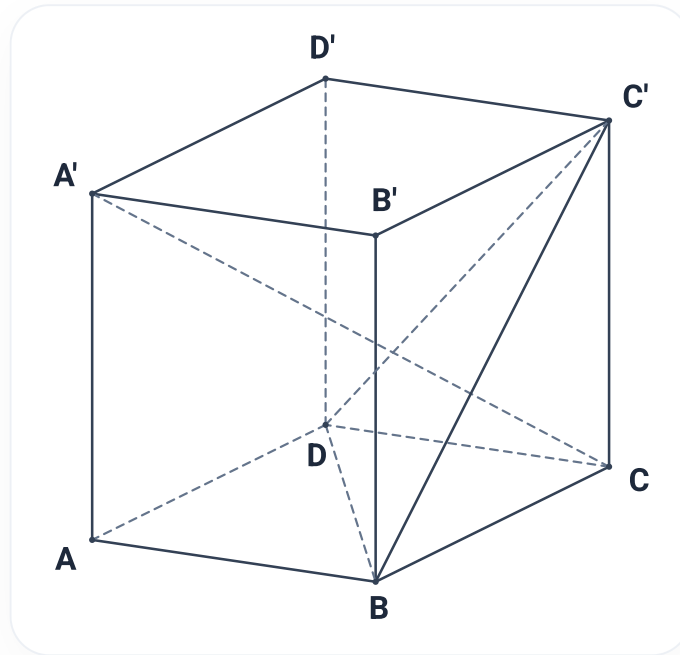
ג. מצאו את הערך של k .

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2 , קטן ממנו או שווה לו. נמקו את קביעתכם.

שאלה 2 · וקטורים בקובייה: אלכסון מאונך למישור, מפגש תיכונים, ישר ומישור

בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה $ABCD A' B' C' D'$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.



א. הוכיחו כי האלכסון CA' מאונך למישור $BC'D$.

נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש $BC'D$.

ב(1). הביעו את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב(2). הוכיחו כי הנקודות C, E ו- A' נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0,0,0)$, $C(3,4,0)$, $A(4,n,p)$, n ו- p הם פרמטרים. שיעור ה- z של הנקודה C' הוא חיובי.

ג(1). מצאו את שיעורי הנקודה A, והוכיחו כי ABCD נמצא במישור $z = 0$.

ג(2). מצאו את שיעורי הנקודה C' .

ד. ℓ הוא ישר החיתוך בין המישור $BC'D$ ובין המישור $BCC'B'$.

מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ .

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר ℓ ואינו חותך את ציר ה- x .

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: שורשי יחידה, משולש במישור גאוס וחזקה מדומה טהורה

נתונה המשוואה: $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב. נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A, B ו-C מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים: $d \cdot z_0$, $d \cdot z_0$ ו- $d \cdot (z_0)^4$ בהתאמה. $d > 0$ הוא פרמטר. נתון כי שטח המשולש ABC הוא: $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

נגדיר: $w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1 + i)$.

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC.

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם חזקה n: אסימפטוטות, קיצון, שטח וערך מוחלט

נתונה הפונקציה $f(x) = (e^x - 1)^n - 4$, המוגדרת לכל x . n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל-2. ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי-זוגי.

א(1). מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).

א(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב-ג עבור $n = 2$. נתונה הפונקציה: $g(x) = 3e^x - 7$, המוגדרת לכל x .

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

ב(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = |f(x)|$, המוגדרת לכל x .

ג(1). כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות הללו, וקבעו את סוגן.

ג(2). מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית ופונקציה שנגזרתה היא מינוס הפונקציה: חקירה ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.

א(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = (x+1)(1-\ln(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ב(2). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ב(3). מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $g(x)$.

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e$ ו- $x = 1$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math