

שאלה 1 · שני מעגלים ומשיקים: מקום גאומטרי, שטח משולש ומשיק לפרבולה

נתון מעגל I שמשוואתו: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$, ומרכזו בנקודה K. נתון מעגל II שמשוואתו: $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$, ומרכזו בנקודה L. הנקודה A נמצאת על מעגל I, והנקודה B נמצאת על מעגל II. מעבירים משיק למעגל I דרך הנקודה A ומשיק למעגל II דרך הנקודה B. שני המשיקים נחתכים בנקודה M.

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות $MA = MB$ הוא קו ישר, ומצאו את משוואתו.

ב(1). הראו כי הישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף א והישר KL מאונכים זה לזה.

ב(2). האם קיימת נקודה M שמתקיים בעבורה $ML = MK$? נמקו את תשובתכם.

נתון כי בעבור אחת מן הנקודות M, הנמצאת מעל הישר KL, שטח המשולש KLM הוא 9.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

הנקודה M שמצאתם בסעיף ג נמצאת על הפרבולה: $y^2 = 2px$, p הוא פרמטר.

ד. מצאו את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה M.

שאלה 2 · שני ישרים נחתכים במרחב: זווית, מישור ופירמידה

נתונים שני ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 . לפניכם הצגה פרמטרית של כל אחד מן הישרים: $\ell_1: \underline{x} = t(-1, 3, 0)$, $\ell_2: \underline{x} = (1, -3, 0) + m(0, k, 1)$. הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

נסמן ב- α את הזווית בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

ב. מצאו את הערך של k שבעבורו מתקיים: $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

הציבו: $k = 2$, וענו על הסעיפים ג-ה. המישור π מכיל את הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

ג. מצאו את משוואת המישור π .

הנקודה B נמצאת על הישר ℓ_2 , והנקודה O היא ראשית הצירים. המשולש AOB הוא שווה שוקיים, $AO = AB$.

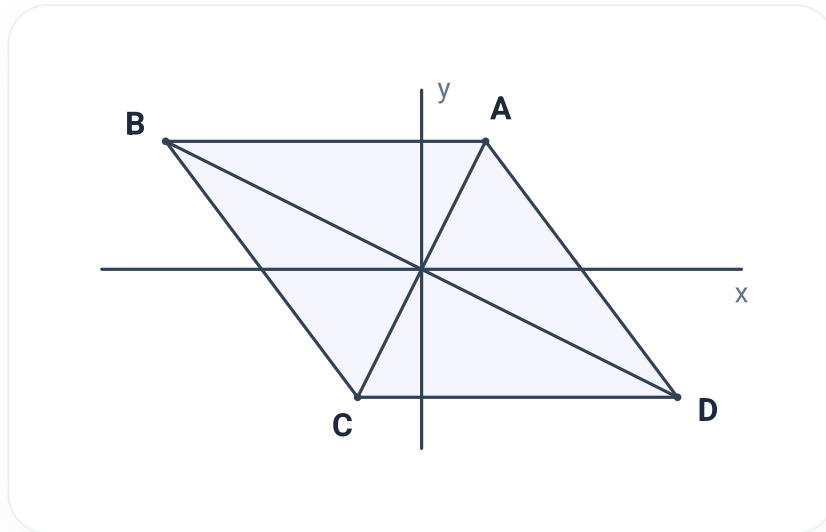
ד. הסבירו מדוע המשולש AOB נמצא במישור π .

ה. מצאו את שיעורי הנקודה S. נתון: נפח הפירמידה SAOB הוא: $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.

ה. מצאו את שיעורי הנקודה S (את שתי האפשרויות).

שאלה 3 · מעוין במישור גאוס, מספרים הופכיים ושורשי יחידה

במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס. אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים. המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A. נתון: $BD = 2AC$.



א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים B, C ו-D.

נסמן: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

ב(1). כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $(\frac{1}{z}, \dots)$ למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

ב(2). ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע. מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \bar{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ-0. מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

ד. מצאו את הערך של r . פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת-סעיף ב(2).

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר והפונקציה $1/f$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - b}{(e^x - 4)^2}$, $b \neq 4$. הוא פרמטר חיובי.

ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה: $x = \ln(12)$.

ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ו. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים.

ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. מהו שיעור ה- y של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ו. קבעו אם הערך של: $\int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ קטן או גדול מ- $1\frac{1}{2}$. נמקו את קביעתכם.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית: חקירה, גרף הנגזרת ושטחים

נתונה הפונקציה: $f(x) = x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2)$, המוגדרת בתחום: $x > 0$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x) = (\ln(x))^2 - 4$, $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, המוגדרות בתחום: $x > 0$.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x העבירו אנכים לציר ה- x .

ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי האנכים.