

שאלה 1 · מעגל עם פרמטר, משיק, ומקום גאומטרי שהוא אליפסה

נתון מעגל I שמשוואתו היא $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$. הוא פרמטר קטן מ-9.

א. הביעו באמצעות t את רדיוס המעגל.

הישר $y = x$ משיק למעגל.

ב. מצאו את הערך של t .

הזיזו את מעגל I שמאלה כך שהתקבל מעגל II שמרכזו בראשית הצירים O . A היא נקודה כלשהיא על מעגל II כך ש-

$-1.5 \leq y_A \leq 1.5$. דרך הנקודה A מעבירים מיתר AB המאונך לציר ה- y . נקודה P נמצאת על המיתר AB כך

שמתקיים $AB = 2 \cdot PO$.

ג. הראו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על אליפסה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה K היא המוקד הימני, והנקודה F היא המוקד השמאלי של האליפסה שמצאתם בסעיף ג. C היא נקודה כלשהיא

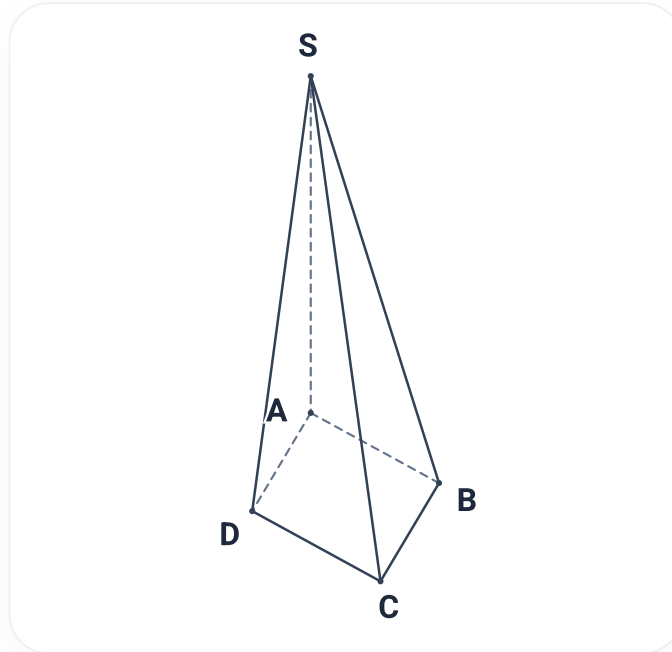
על האליפסה כך שמתקבל משולש CKF .

ד. חשבו את היקף המשולש CKF .

ה. האם קיימת נקודה C שבעבורה שטח המשולש CKF הוא 3? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · פירמידה שבסיסה מקבילית: וקטורים, ניצבות ומישור המקביל למקצוע

נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית. SA הוא גובה הפירמידה. הנקודה M היא אמצע האלכסון BD. נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.



א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{SM}$.

נתון כי $\vec{SM}$ מאונך ל- $\vec{DB}$.

ב. הוכיחו כי $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

נתון: $A(0,0,0)$, $B(0,5,0)$, $S(0,0,6)$, $D(3,p,0)$, $p > 0$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות D ו-C.

דרך האלכסון AC מעבירים מישור המקביל למקצוע SD. המישור חותך את המקצוע SB בנקודה K.

ד. מצאו את משוואת המישור.

ה. לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מן הטענות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I הישר KM מקביל לישר SD.

II כל ישר שמאונך למישור ACK, מאונך לישר SD.

שאלה 3 · מרוכבים: אנך אמצעי, משוואה ריבועית וריבוע מסובב כשורשים

ענו על הסעיפים הבאים:

א. הביעו באמצעות x ו- y את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = |z - (2 + 2i)|$.

z הוא משתנה מרוכב. נתונה המשוואה $z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$. A ו-B הן נקודות המיוצגות על ידי שני פתרונות המשוואה.

ב. הראו כי הנקודות A ו-B נמצאות על המקום הגיאומטרי שמצאתם בסעיף א.

הנקודות C ו-D נמצאות על הצירים כך ש-ABCD הוא ריבוע. סובבו את הריבוע ABCD סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון בזווית α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). כל שמונה הנקודות (הנקודות A, B, C, D וארבע הנקודות שהתקבלו אחרי הסיבוב) מיוצגות על ידי פתרונות של המשוואה $z^n = b$ שבה n הוא מספר טבעי ו- b הוא מספר ממשי.

ג(1). מצאו את הערך של b ואת הערך של α בעבור $n = 8$.

ג(2). מצאו ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^\circ$, ומצאו את הערך של b המתאים לו.

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר: זיהוי גרפים, נקודה חסרה והשוואת אינטגרלים

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

בסוף השאלה מופיעים ארבעה גרפים I-IV:



ענו על התת סעיפים (1)-(3) בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = 3$ ואיזה מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ בעבור $a = -3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a = 3$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ה. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

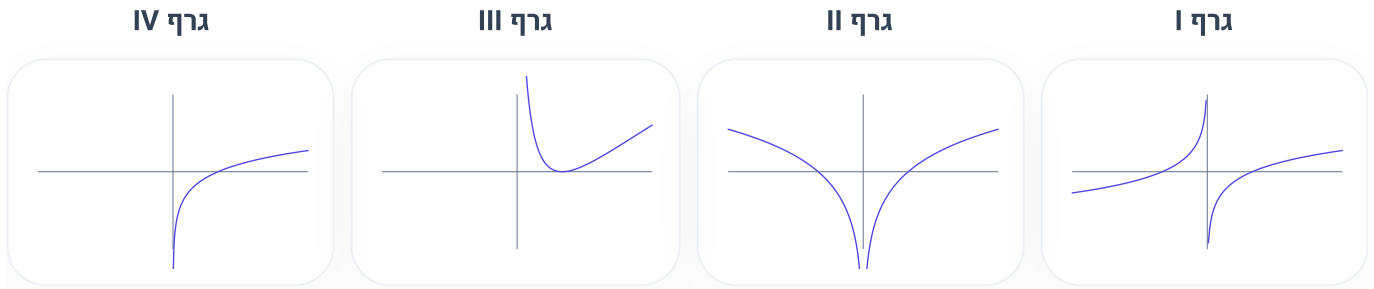
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · הפונקציה $\ln(x)$: זיהוי גרף, ריבוע של לוגריתם ושטח של g'/g

נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

לסעיף א(2) - ארבעה גרפים I-IV:



א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). לפיכם ארבעה גרפים, I-IV. קבעו איזה מהם מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

הציבו $n = 2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על סעיפים ב-ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = (f(x))^2 - 4$ המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $k(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ בתחום $x > 0$.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $k(x)$.

ד(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $k(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^3$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math