

שאלה 1 · אליפסה, מעגל במוקד, משיק וריבוע שצלעו על המשיק

נתונה אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k הוא פרמטר חיובי. הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה. נתון מעגל שמרכזו בנקודה F והוא עובר בנקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x .

א. הביעו באמצעות k את משוואת המעגל.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- y . הנקודה D היא נקודת החיתוך של הקטע BF עם המעגל.

ב(1). מצאו את היחס בין הקטע BD ובין הקטע DF .

ב(2). הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה D .

ג. הביעו באמצעות k את משוואת המשיק למעגל בנקודה D .

בונים ריבוע שאורך הצלע שלו הוא 15. אחת מצלעות הריבוע נמצאת על המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג. הנקודה B נמצאת בתוך הריבוע.

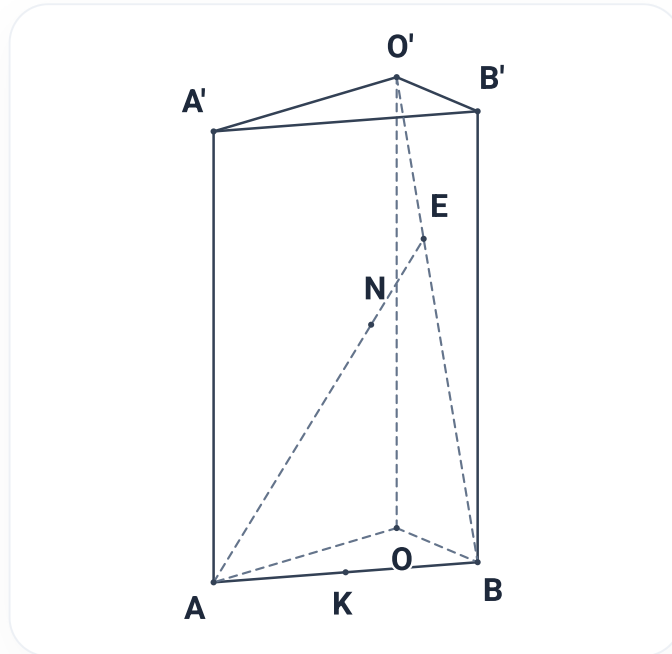
ד. הביעו באמצעות k את משוואת הישר שעליו נמצאת צלע הריבוע המקבילה למשיק.

נתון כי הנקודה B היא נקודת המפגש של אלכסוני הריבוע.

ה. מצאו את הערך של k .

שאלה 2 · וקטורים במנסרה משולשת: נקודות על ישר, מישור, מרחק ונפח פירמידה

בסרטוט שלפניכם מנסרה ישרה $AOBA'O'B'$ שבסיסה AOB הוא משולש ישר-זווית ($\angle AOB = 90^\circ$). הנקודה K היא אמצע המקצוע AB . הנקודה E נמצאת על הקטע $O'B$ כך ש- $O'E = \frac{1}{3} \cdot O'B$. הנקודה N נמצאת על הקטע AE כך ש- $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AE}$. נסמן: $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OO'} = \underline{w}$.



א(1). הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את $O'N$.

א(2). הוכיחו כי הנקודות O' , N , K נמצאות על ישר אחד, ומצאו את היחס בין $O'K$ ובין $O'N$.

נתון: $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $E(0,1,6)$. הקודקוד B נמצא על החלק החיובי של ציר ה- y , והקודקוד O' נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות N ו- B .

ג. מצאו את משוואת המישור $A'KB'$.

ד(1). מצאו את המרחק בין הנקודה N ובין המישור $A'KB'$.

ד(2). מצאו את נפח הפירמידה $NA'KB'$.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: שורשים, תנאי על דרך הראשית ושטח מצולע

נתונים שני מספרים מרוכבים z_1 ו- z_2 שמכפלתם היא $-19 + 4i$. $z_1 = 2 + 3i$.

א. מצאו את המספר z_2 .

נתונה המשוואה $w^3 = z_1 + z_2$, w הוא משתנה מרוכב.

ב. מצאו את פתרונות המשוואה.

נתון מספר מרוכב $z = 2(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. נתון כי המספרים z ו- z^3 נמצאים על ישר אחד שעובר בראשית הצירים.

ג. מצאו את ארבע האפשרויות של המספר z .

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב וארבעת המספרים שמצאתם בסעיף ג, מייצגים את כל הקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ד(1). סרטטו את המצולע במערכת צירים.

ד(2). חשבו את השטח של המצולע.

נתון מספר מרוכב: $3(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. מכפילים כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודי המצולע במספר מרוכב זה, כך שנוצר מצולע חדש.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המצולע החדש משטח המצולע שמצאתם בסעיף ד.

שאלה 4 · חקירת מנה מעריכית עם פרמטר, גרף הנגזרת והערכת אינטגרל

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$, המוגדרת לכל x . b הוא פרמטר.

ענו על התת-סעיפים (1)-(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1.5$.

ב. מצאו את הערך של b (מצאו את שתי האפשרויות).

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של b הקטן ביותר שמצאתם, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ידוע כי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא אחת משתי נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת לכל x .

ד(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפניכם טענה: $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · חקירת מנה לוגריתמית, הפונקציה ההופכית ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון הביטוי $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k הוא פרמטר גדול מ-1.

ה(1). קבעו איזה מן הביטויים I-II שווה לערך של הביטוי הנתון. נמקו את קביעתכם. I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$

ה(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^3$ ו- $x = e^6$.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math