

שאלה 1 · פרבולה, מעגל המשיק לה ולציר, ומקום גאומטרי של נקודות על משיקים

נתונה פרבולה שמשוואתה: $y^2 = 54x$. בנקודה A , שנמצאת על הפרבולה, מעבירים משיק לפרבולה ששיפועו $\frac{3}{4}$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A .

הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו בנקודה M . נתון כי המשיק לפרבולה הוא גם משיק למעגל בנקודה A , וכי ציר ה- y משיק למעגל כך ששיעור ה- x של הנקודה M קטן משיעור ה- x של הנקודה A .

ב(1). מצאו את משוואת הישר AM .

ב(2). מצאו את משוואת המעגל.

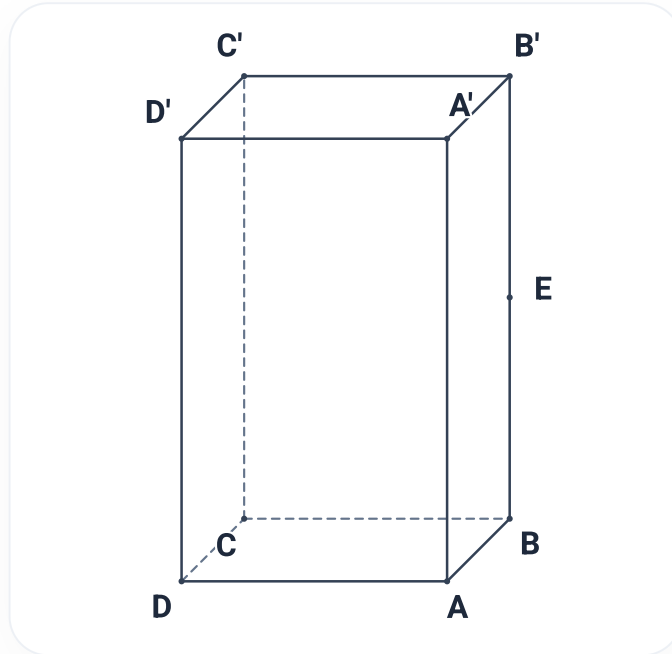
נקודה B היא נקודה כלשהי על המעגל. דרך B מעבירים משיק למעגל. הנקודה P נמצאת על המשיק כך ש- $BP = 36$.

ג(1). מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה.

ג(2). האם על המקום הגאומטרי שמצאתם יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 80? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · וקטורים בתיבה: נקודה במישור, אנך למישור ומרחק נקודה ממישור

בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A' B' C' D'$. נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $AA' = \underline{w}$. הנקודה E היא אמצע המקצוע BB' .



א. הביעו את $\overrightarrow{EA}$ ו- $\overrightarrow{EC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

הנקודה M מקיימת: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

ב. הביעו את $\overrightarrow{EM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$. a ו- b הם פרמטרים.

ג(1). מצאו את הערך של a ואת הערך של b .

ג(2). האם הנקודה M נמצאת במישור AEC ? נמקו את תשובתכם.

נתון כי $|\underline{w}| = 4$ והווקטור $\overrightarrow{BM}$ מאונך למישור AEC .

ד. מצאו את הערך של $|\underline{u}|$ ואת הערך של $|\underline{v}|$.

ה. חשבו את המרחק בין הנקודה B ובין המישור AEC .

שאלה 3 · שורשים מסדר 3, נקודות על ישר דרך הראשית, שטח מרובע ומשוואה עם צמוד והופכי

נתונה המשוואה: $z^3 = -64$. z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים: $w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$, $50^\circ < \alpha < 130^\circ$. שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו- w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α .

נתון כי w_1 הוא אחד מהפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r .

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$. $ABCD$ הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1 , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3 , הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2 , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4 .

ד. הראו כי שטח המרובע $ABCD$ הוא 36.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E , שמיוצגת על ידי המספר u , נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA . נתון כי $|u| > 1$, $\bar{u} + \frac{1}{u} = 5.2(\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u .

שאלה 4 · חקירת $x^n(3 - \ln x)$, הפונקציה $\frac{1}{f}$ ושטח בעזרת $\frac{f'}{f}$

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$ המוגדרת בתחום $x > 0$. n הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2.

ב. מצאו את הערך של n .

הציבו $n = 1$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג'ו'.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ה(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ה(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

a הוא פרמטר, $1 < a < 3$. נתון כי השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על-ידי ציר ה- x ועל-ידי

הישרים $x = e$ ו- $x = e^a$ הוא $\ln 10$.

ו. מצאו את הערך של a .

שאלה 5 · חקירת $4e^x - x + 9 \ln(4 - e^x)$, גרף הנגזרת ופרמטר

נתונה הפונקציה: $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. הראו כי: $f'(x) = \frac{-4(e^x-1)^2}{4-e^x}$.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ג. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ המקביל לציר ה- x .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. לפונקציה f יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < \ln 4$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + ax$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. a הוא פרמטר.

א. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה $g(x)$ שתי נקודות קיצון. נמקו את תשובותיכם.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math