

שאלה 1 · פרבולה, משיק ומעגל שמרכזו במוקד: מקום גאומטרי של מרכזי מעגלים

נתון הישר $y = x$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הוא פרמטר חיובי. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.

א. הביעו באמצעות p את שיעורי הנקודה A.

נסמן ב- ℓ את המשיק לפרבולה בנקודה A. הנקודה F היא מוקד הפרבולה. מעגל I שמרכזו בנקודה F משיק לישר ℓ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות p את משוואת מעגל I.

ג. הראו כי הנקודה B נמצאת על ציר ה- y .

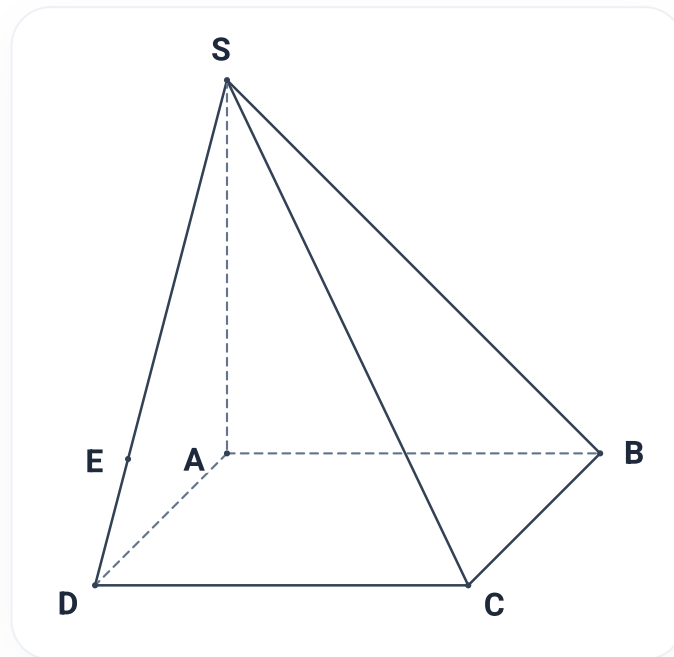
נתון: $AB = 4\sqrt{5}$.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבפנים למעגל I ואורך הרדיוס שלהם הוא $2\sqrt{5} - 3$.

שאלה 2 · וקטורים בפירמידה: נקודה על מקצוע לפי פרמטר, משוואת מישור והשוואת נפחים

בסרטוט שלפניכם פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע. המקצוע AS הוא גובה בפירמידה. אורך המקצוע AS שווה לאורך צלע הריבוע ABCD. הנקודה E נמצאת על המקצוע SD כך ש- $SE = \frac{3}{4} \cdot SD$. הנקודה N מקיימת: $\vec{SN} = k \cdot \vec{SC}$. הוא פרמטר. נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{u}$.



א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\vec{EN}$.

נתון: $|\vec{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot |\underline{w}|$.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k = \frac{1}{2}$, וענו על הסעיפים ג-ד. ממקמים את הפירמידה במערכת צירים כך ש- $A(0,0,0)$, $B(0,12,0)$. הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x , והקודקוד S נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ג(1). מצאו את שיעורי הנקודות N ו-E.

ג(2). מצאו את משוואת המישור ENB.

ד. האם נפח הפירמידה SENB גדול מנפח הפירמידה CENB, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים בהצגה קוטבית: מציאת פרמטרים, שורשים ושטח מרובע במישור גאוס

נתונים שלושה מספרים מרוכבים: $z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, $z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ))$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $r > 0$. $w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}$. הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא -1 .

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r .

נתונה המשוואה $z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$. z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים. כל אחת מן הנקודות B ו-C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות שמצאתם בסעיף ג. הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע השני. המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + i \cdot y$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה K. b הוא מספר ממשי חיובי. נתון כי שטח המרובע CKBO הוא $7\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של b .

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר: שתי אסימפטוטות אופקיות, סקיצה ושטח בעזרת $\frac{f'}{f}$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + a$. a הוא פרמטר.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

נתון כי הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a .

הציבו $a = 2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. הראו כי $f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$.

ה(1). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ה(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 2$.

שאלה 5 · חקירת $8 \ln(x^2 + 7) - 2x$ והפונקציה $\ln(f(x) - 18)$: אסימפטוטות וקיצון

נתונה הפונקציה: $f(x) = 8 \cdot \ln(x^2 + 7) - 2x$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה $f(x)$.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x) - 18)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x) > 18$.

ד(1). מצאו כמה אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ד(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math