

שאלה 1 · פרבולה ואליפסה עם מוקד משותף: ארבע נקודות על מעגל

הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. t הוא פרמטר חיובי.

אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.

בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.

א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו- B . הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B .

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

ישר המאונך לציר ה- x , עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות, C ו- D .

הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D .

ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו- D .

ד(1). הסבר מדוע ארבע הנקודות A , B , C ו- D נמצאות על מעגל אחד.

ד(2). מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

שאלה 2 · שני מישורים בזווית 45° : אנכים, ישר חיתוך ושטח משולש

נתונים שני מישורים: $\pi_1 : z - 3 = 0$, $\pi_2 : ay + z - 8 = 0$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

הזווית בין המישורים היא 45° .

א. מצא את הערכים האפשריים בעבור הפרמטר a .

הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים. מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.

האנך חותך את המישור האחר בנקודה B .

ב. מצא את אורך הקטע AB .

ℓ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .

ג. מצא את ההצגה הפרמטרית של ℓ .

מן הנקודה B העבירו אנך לישר ℓ . האנך חותך את הישר ℓ בנקודה C .

ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

שאלה 3 · מספרים צמודים, חזקות בדה-מואבר ומעגל במישור גאוס

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

הוכח כי לכל n טבעי:

ב(1). המספר w_1 הוא מספר ממשי.

ב(2). המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.

מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

שאלה 4 · פונקציה מעריכית עם פרמטר, הפונקציה $1 + \frac{1}{f}$ ומקסימום של אינטגרל

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצא את m .

א(3). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$.

ג(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי. נמק את תשובתך.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית רציונלית: חקירה, זיהוי גרף בלי צירים ומלבן

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$.

א(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

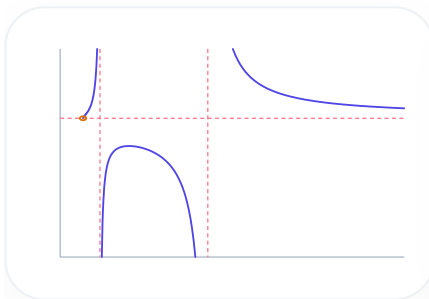
א(2). מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

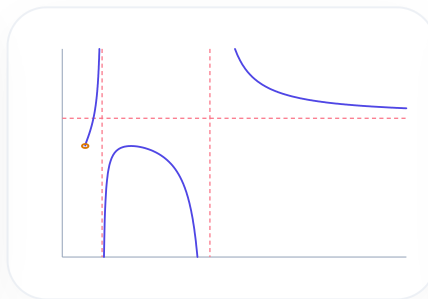
ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת.

קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט את שיקולך.

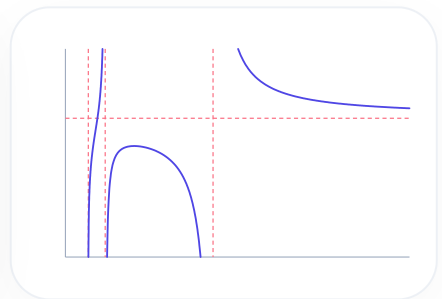
גרף ג



גרף ב



גרף א



ג(1). האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.

ג(2). מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד? נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$, $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$.

נסמן מלבן $ABCD$. הנקודות A ו- B הן שתי נקודות על ציר ה- x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת.

הנקודות C ו- D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן $ABCD$? נמק את תשובתך.

כל הברויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math