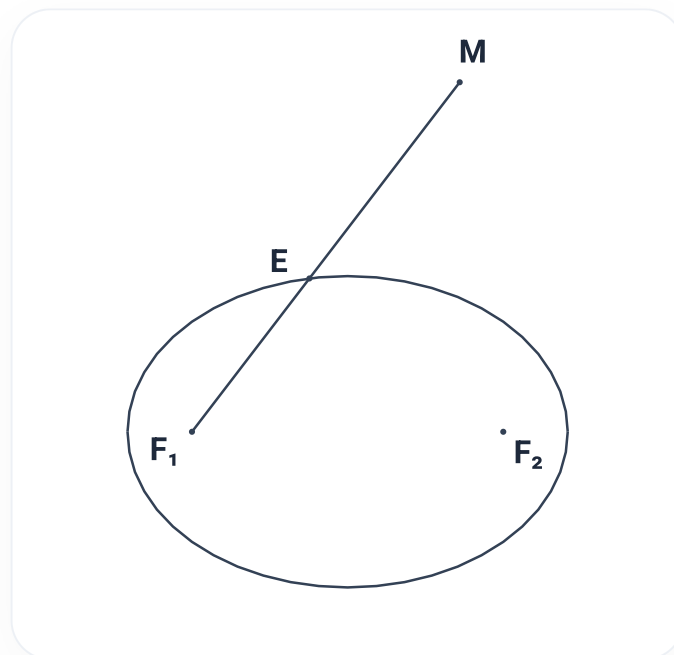


שאלה 1 · אליפסה, מקום גאומטרי של מעגל והזזה ומתיחה של עקום

נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b הוא פרמטר חיובי. ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x . נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2 , את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2 . נתון כי המרובע $F_1 D_1 F_2 D_2$ הוא ריבוע.



א(1). מצאו את הערך של b .

א(2). חשבו את שטח הריבוע $F_1 D_1 F_2 D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 4.5$ וענו על סעיפים ב-ד. נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה. מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר. מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר, ומתקבל עקום חדש.

ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששנייה מקודקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש עם ציר ה- x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש. נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · שני מישורים עם פרמטר: ישר חיתוך, זווית ושטח משולש

נתונים שני מישורים, π_1 ו- π_2 : $\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$, $\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$.
הוא פרמטר. k

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, ℓ_1 , מקביל לישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k)$.
ב(1). מצאו את הערך של k .

ב(2). מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 .

ב(3). מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור $[yz]$. הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם המישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה.

ג(1). מצאו את שיעורי הנקודות A, P ו-B.

ג(2). מצאו את שטח המשולש APB.

שאלה 3 · שורשים מסדר 6, הזזה במישור גאוס, משושה משוכלל ודלתון

נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב(1). היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

ב(2). הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתן.

ב(3). הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג(1). מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

שאלה 4 · שתי פונקציות מעריכיות עם מכנה משותף: חקירה, זיהוי גרפים ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-5e^x+4}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

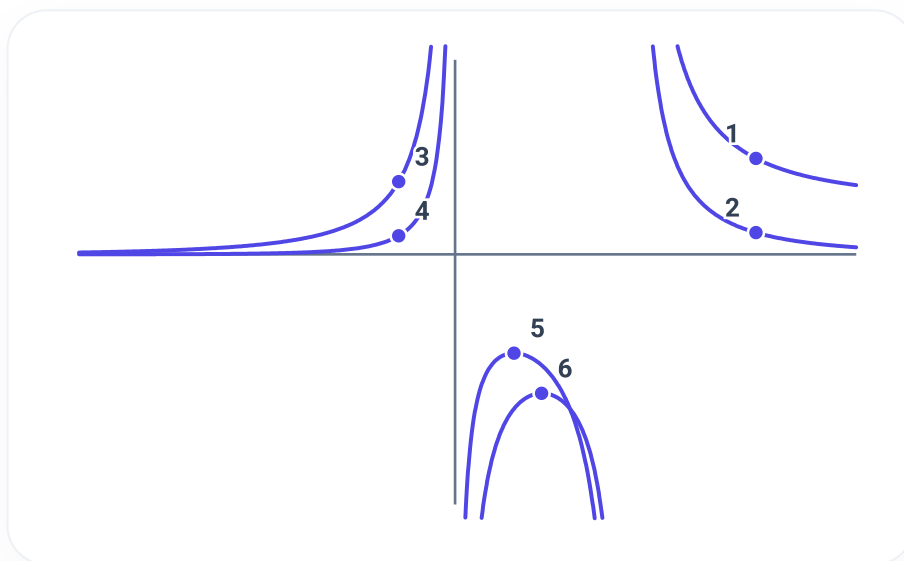
א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x}-5e^x+4}$, המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$. כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, I-II. קבעו, בנוגע לכל אחד מהביטויים, אם הוא שלילי או חיובי. נמקו ללא חישוב. I.

$$\int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx \quad \text{II} \quad \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ובין הישרים $x = \ln 9$ ו- $x = \ln 16$.

שאלה 5 · פונקציה לוגריתמית אי-זוגית והפונקציה ההופכית לה

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

א(3). הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב(2). האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

ב(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.

ג(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג(4). בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.

ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

כל הברריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math