

שאלה 1 · מקום גאומטרי של זווית ישרה, פרבולה ומשיקים מקבילים

נתונות הנקודות $A(-9a, 0)$ ו- $B(41a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי. הנקודה P מקיימת $\angle APB = 90^\circ$.

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על מעגל, ומצאו את משוואתו. הביעו את תשובתכם באמצעות a .

נתון כי השטח הגדול ביותר של המשולש APB הוא 156.25.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = \frac{1}{2}$ וענו על הסעיפים ג-ד. אמצע הקטע AB הוא מוקד של פרבולה שמשוואתה קנונית. הפרבולה והמעגל שמצאתם נחתכים ברביע הראשון בנקודה C .

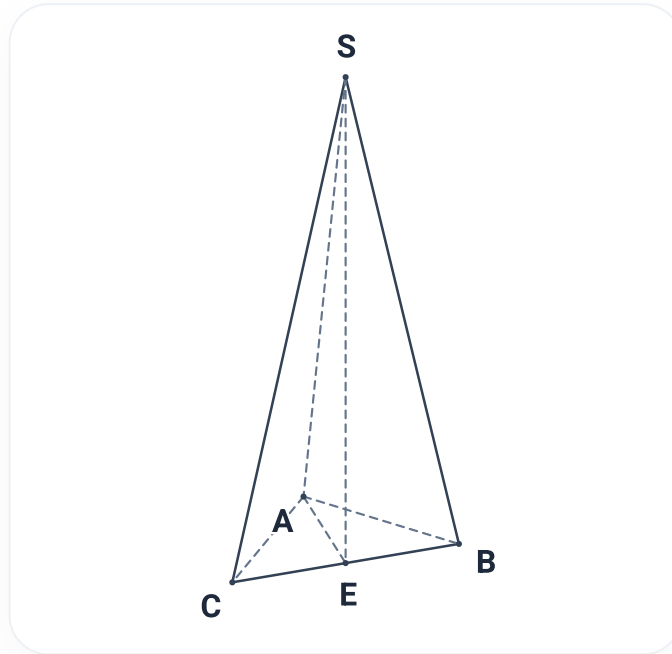
ג. מצאו את שיעורי הנקודה C .

הישר ℓ משיק לפרבולה בנקודה C . מעבירים משיק למעגל שמצאתם. נתון כי משיק זה מקביל לישר ℓ .

ד. מצאו את המרחק בין הישר ℓ לבין המשיק למעגל (מצאו את שתי האפשרויות).

שאלה 2 · פירמידה משולשת: ניצבות, קודקודים, ישר מקביל וחס נפחים

בסרטוט שלפניכם פירמידה משולשת $SABC$. הנקודה E היא אמצע המקצוע BC . נסמן $\vec{EC} = \underline{v}$, $\vec{AE} = \underline{u}$. נתון: $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$.



א. הוכיחו כי $\vec{AE}$ מאונך ל- $\vec{BC}$.

נתון: הקטע SE הוא גובה בפירמידה והאורך שלו הוא 20. $A(0,0,0)$, $B(6,8,0)$. הקודקוד C נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x , ושיעור ה- z של הקודקוד S הוא חיובי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקודים C ו- S .

הנקודה F נמצאת על המקצוע SC כך ש- $\vec{SF} = \frac{1}{4}\vec{SC}$. דרך הנקודה F מעבירים ישר המקביל לישר AC , וחותך את המישור ABS בנקודה M .

ג(1). מצאו הצגה פרמטרית של הישר FM .

ג(2). מצאו את שיעורי הנקודה M .

ד. מצאו פי כמה גדול נפח הפירמידה $MABC$ מנפח הפירמידה $FAEC$. נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · מספר מרוכב והופכי שלו, שתי משוואות ומצולע משוכלל

נתון המספר המרוכב $w = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $r > 0$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

א. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של המספר $\frac{1}{w}$.

הנקודה A במישור גאוס מייצגת את המספר w , והנקודה B מייצגת את המספר $\frac{1}{w}$. הנקודה O היא ראשית הצירים. נתון כי שטח המשולש AOB הוא $\frac{\sqrt{2}}{4}$ והזווית AOB היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של θ .

נתונות שתי משוואות: I. $z^8 = w^8$ II. $z^8 = (w \cdot \bar{w})^4$. z הוא מספר מרוכב. נתון מצולע קמור שקודקודיו הם כל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה I וכל הנקודות המייצגות את הפתרונות של משוואה II.

ג(1). מצאו כמה קודקודים יש למצולע.

ג(2). האם כל קודקודי המצולע נמצאים על מעגל אחד שמרכזו בראשית הצירים? נמקו את תשובתכם.

נתון כי שטח המצולע הוא 49.

ד. מצאו את הערך של r .

שאלה 4 · חקירת פונקציה מעריכית, פונקציה קדומה דרך נגזרת נתונה ושטח עם פרמטר

נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - \frac{1}{1-e^x}$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). האם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם הצירים? נמקו את תשובתכם.

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = -x + \ln(e^x - 1)$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). הראו כי $g'(x) = f(x) - e^x$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

בנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר $x = \ln(b)$.

$b > 2$ הוא פרמטר. הביעו את תשובתכם באמצעות b .

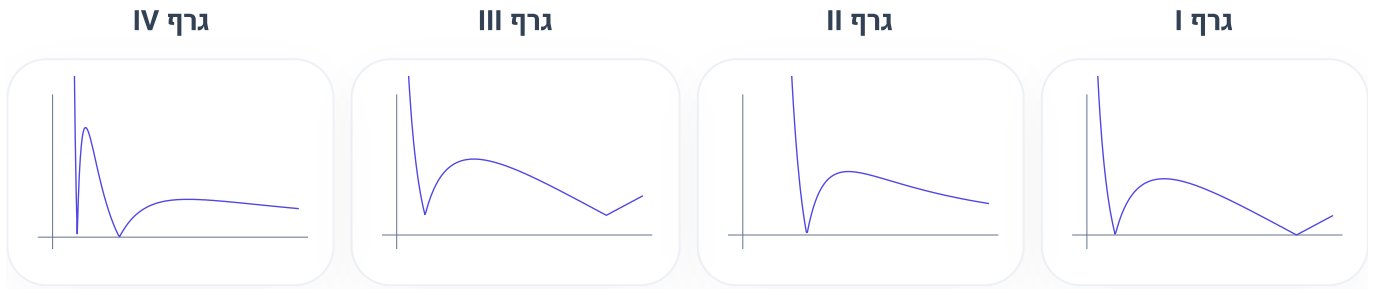
נתון כי השטח שמצאתם בסעיף ד שווה ל- $b - 2 + \ln(1.8)$.

ה. מצאו את הערך של b .

שאלה 5 · חקירת פונקציה לוגריתמית עם פרמטר, פונקציה קדומה וזיהוי גרף של ערך מוחלט

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a + \ln(x)}{x}$, המוגדרת בתחום $x > 0$, a הוא פרמטר.

בסוף השאלה מופיעים ארבעה גרפים I-IV:



(הגרפים I-IV הם סקיצות איכותיות, ואינם בקנה מידה.)

בתת סעיפים (1)-(3) הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

א(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$, המוגדרת בתחום $x \neq 0$. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$ נחתכים בנקודה שבה $x = e^2$.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם וענו על סעיפים ד-ה. נתונה הפונקציה $h(x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$. גרף הפונקציה $h(x)$ עובר בנקודה $(e^3, -1.5)$. נגזרת הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h'(x) = f(x) - g(x)$.

ד. מצאו את $h(x)$.

ה. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-IV מייצג את הפונקציה $|h(x)|$. נמקו את תשובתכם.

כל הברויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math