

שאלה 1 · אליפסה, מקום גאומטרי של אמצעי קטעים ומעגל המשיק לשני ישרים מקבילים

נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית. הנקודה $A(2, 6)$ נמצאת על האליפסה. שיעורי המוקד הימני של האליפסה הם $(\sqrt{25.6}, 0)$.

א. מצאו את משוואת האליפסה.

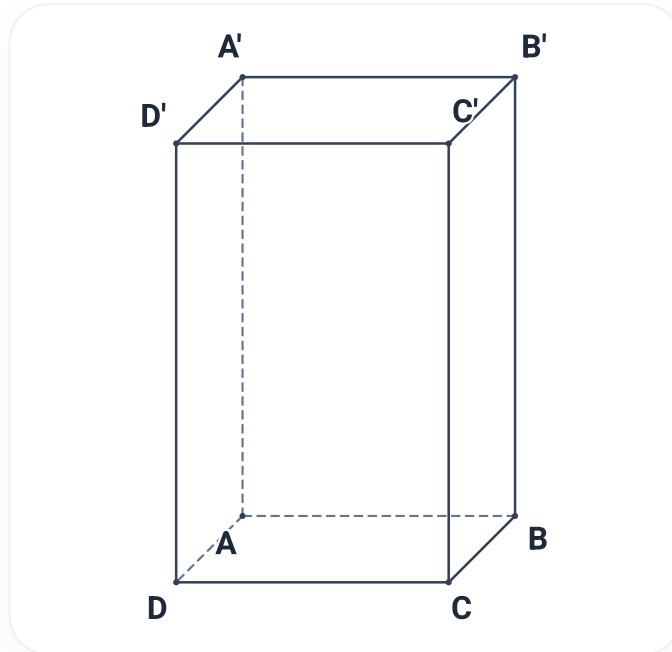
הנקודה B היא נקודת החיתוך של האליפסה עם החלק החיובי של ציר ה- x . דרך הנקודה A העבירו ישר העובר דרך ראשית הצירים, הנקודה O. הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר AO. הנקודה P היא אמצע הקטע BC.

ב. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P.

ג. מצאו את משוואת המעגל המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם, ומשיק לישר AO בנקודה O.

שאלה 2 · תיבה במערכת צירים: מרחקים, מישור פאה, זווית בין ישרים ונפח

בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A' B' C' D'$. נתון כי משוואת המישור $A' B' C' D'$ היא $x + 4y - 8z - 126 = 0$, וכי $B(0, 7, 8)$.



א. מצאו את אורך המקצוע BB' .

נתון כי הצגה פרמטרית של הישר AB היא $\underline{x} = (0, 7, 8) + t(0, 2, 1)$. אורך המקצוע AB הוא $5\sqrt{5}$, ושיעור ה- y של הקודקוד A הוא שלילי.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד A.

ג. מצאו את משוואת המישור $ABB'A'$.

נתונה נקודה $M(k, 1, 5)$, k הוא פרמטר חיובי. נתון כי גודל הזווית שבין הישר AB ובין הישר AM הוא 60° .

ד. מצאו את הערך של k (תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם).

ה. נתון כי הנקודה M נמצאת על המישור $DCC'D'$.

ה. מצאו את נפח התיבה.

שאלה 3 · מספרים מרוכבים: מקום גאומטרי פרבולה, שורשים, הופכי יחס שטחים

ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z - 3i| = \frac{z - \bar{z}}{2i} + 3$ הוא פרבולה, ומצאו את משוואתה.

נתון מספר מרוכב $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $r > 0$. נתון מצולע קמור, שקודקודיו מיוצגים על ידי פתרונות המשוואה $z^4 = \frac{1}{r^4} \cdot (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$, z הוא משתנה מרוכב.

ב. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע א.

נתון מצולע א, שקודקודיו מיוצגים על ידי המספרים w , $-w$, $\frac{1}{w}$, $-\frac{1}{w}$.

ג. הביעו באמצעות r ו- θ הצגה קוטבית של כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע א.

נתון כי מצולע א הוא מעוין.

ד. מצאו את הערך של θ .

נתון כי הנקודה המייצגת את w נמצאת על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ה. מצאו את היחס בין שטח מצולע א ובין שטח מצולע א.

שאלה 4 · הפונקציה $y = e^x \cdot f(x)$: סימן, אסימפטוטות, קיצון ושטח עם פרמטר

$f'(x)$ הוא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$. הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות בתחום $x \neq 0$. נתון כי הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$, וכי $f'(x) \neq 0$ בכל תחום הגדרתה.

א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{1}{x}$.

ב(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

א הוא פרמטר גדול מ-1. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{\ln(2a)}$ ו- $x = \frac{1}{\ln(5a)}$ הוא 9.

ד. מצאו את הערך של a .

שאלה 5 · חקירת פונקציה לוגריתמית: פונקציה קדומה עם נקודת פיתול, $|g|$ וזיהוי גרף

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} \left(a + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד בנקודה שבה $x = \frac{1}{e}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$ בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ו. $g(x)$ היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. ידוע שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול שנמצאת על ציר ה- x .

ג. מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

בעבור הפונקציה $g(x)$ שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ו.

ד(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \ln |g(x)|$.

ו(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

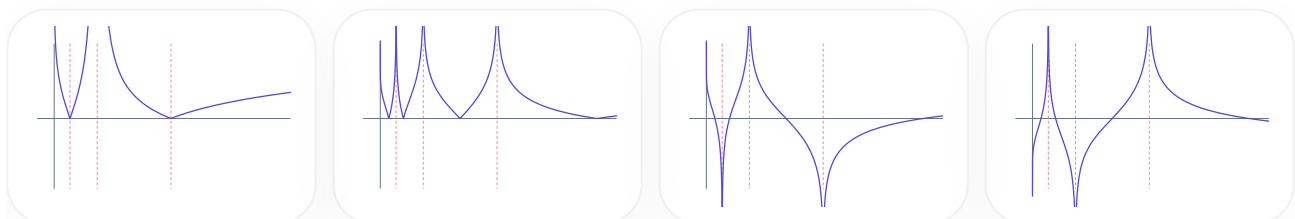
ו(2). אחד מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

גרף IV

גרף III

גרף II

גרף I



כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math